10 класс

1. Ответ. 1 или 2.

Решение. Применяя теорему Виета, получим систему

$$\begin{cases} p^2 - 4q = D, \\ p = -3D, \\ q = 2D^2. \end{cases}$$

Решая систему, получим D=0 или D=1. Учитывая, что $D \neq 0$, будем иметь D=1. Тогда $x_1 = 1,\ \ x_2 = 2$.

2. Ответ. 3616.

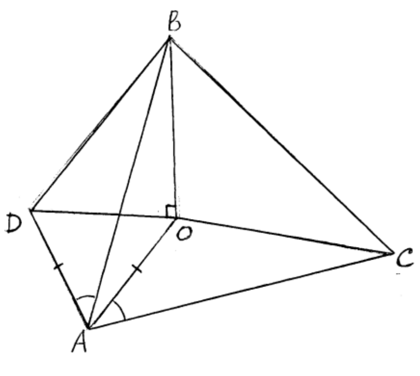
Решение. Так как никакое двузначное число не может удовлетворять условию задачи, то искомое число можно представить в виде $A = 100x + 16$, где x – некоторое натуральное число. Число A делится на 16 тогда и только тогда, когда x делится на 4. Учитывая, что сумма цифр числа A равна 16, то сумма цифр числа x должна быть равной 9. Следовательно, необходимо найти наименьшее натуральное число x, кратное 4, и имеющее сумму цифр, равную 9. На основе признака делимости на 9 заключаем, что число x должно делиться и на 4, и на 9. Так как числа 4 и 9 взаимно просты, то x делится на их произведение, то есть на 36. Наименьшим из таких натуральных чисел x является число 36, которое, очевидно, удовлетворяет условию задачи. Следовательно, искомое число A = 3616.

3. Ответ. Можно.

Решение. По первой команде оставим на месте номер 1 и номер 6, а следующие номера меняются местами: 2 и 10, 3 и 9, 4 и 8, 5 и 7. Тогда получим расположение 1, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2. По второй команде меняются местами номера: 1 и 10, 9 и 2, 8 и 3, 7 и 4, 6 и 5. В результате получим требуемое расположение 10, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

4. Ответ. $\angle AOB$=150°.

Решение.



Построим на отрезке AO правильный треугольник AOD со стороной 3 так, чтобы точки O и D находились в разных полуплоскостях относительно прямой AB. Тогда треугольники ADB и AOC будут равны по двум сторонам и углу между ними: AB=AC (по условию), AD=AO (по построению), DAB= OAC (как углы, которые дополняются одним и тем же углом BAO до 60°).

Поэтому BD=5 и треугольник DOB – прямоугольный, как треугольник со сторонами 3, 4 и 5. Следовательно, $\angle BOD$=90°. Тогда $\angle AOB$=$\angle AOD$+ $\angle DOB$=60°+90°= 150°.

5. Решение. Рассмотрим разность

$$\frac{a}{b+ab} + \frac{b}{a+ab} - 1 = \frac{a^2+b^2-ab-a^2b^2}{(a+ab)(b+ab)}.$$

Доказательство исходного неравенства теперь сводится к проверке неравенства

$$a^2+b^2-ab-a^2b^2 \geq 0.$$

По условию $a+b \leq 2$, поэтому $\sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2} = 1$, то есть $ab \leq 1$. Тогда $a^2b^2 \leq ab$ и

$$a^2+b^2-ab-a^2b^2 \geq a^2+b^2-2ab = (a-b)^2 \geq 0.$$