ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
2016-2017 УЧЕБНЫЙ ГОД

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

10 КЛАСС

Общее количество баллов **35. Решение каждой задачи оценивается Жюри из 7 баллов** в соответствии с критериями и методикой оценки, разработанной центральной предметно-методической комиссией:

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения.**
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако решение содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3-4	Верно рассмотрен один из существенных случаев.
2	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии правильного решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Указания к оцениванию отдельных задач содержатся в комментариях к решениям.

1. В таблице 7×7 (см. рис.) элементы каждой строки и каждого столбца представляют собой арифметические прогрессии. Чему равно число x, стоящее в центральной клетке?

3						143
			x			
82						216

Ответ: 111.

Решение. Средний член арифметической прогрессии равен полусумме крайних, поэтому в средней клетке первой строки стоит число $(3 + 143)/2 = 73$, а в средней клетке последней строки стоит число $(82 + 216)/2 = 149$.

3			73			143
			x			
82			149			216

Элементы среднего столбца также составляют арифметическую прогрессию, поэтому $x = (73 + 149)/2 = 111$.

Комментарий. Верный ответ, полученный последовательным заполнением таблицы – 7 баллов. За арифметические ошибки при верных рассуждениях снижать на 2–3 балла.

2. В школьном турнире по шашкам каждый участник встретился с каждым один раз, за победу присуждалось 2 очка, за ничью – 1 очко, за поражение – 0. Девочек участвовало в 9 раз меньше, чем мальчиков, а очков мальчики вместе набрали в 4 раза больше, чем девочки вместе. Сколько очков набрали девочки?

Ответ: 18 очков.

Решение. Пусть в турнире участвовало x девочек. Тогда всего было $10x$ участников и они набрали $10x(10x-1)$ очков. По условию отношение числа очков, набранных девочками, к числу очков, набранных мальчиками, равно $1:4$. Поэтому девочки набрали пятую часть очков, то есть $2x(10x-1)$ очков, а значит, каждая из девочек выиграла все $10x-1$ партий, которые она сыграла. Если бы среди участников турнира было две девочки, то партию между собой они должны были обе выиграть, что невозможно. Поэтому в турнире участвовала одна девочка; она набрала 18 очков.

Комментарий. Записано выражение для общего количества очков – 1 балл, записано выражение для количества очков, набранных девочками – 2 балла, сделан вывод о числе выигрышей девочек – 2 балла, сделан вывод о числе девочек и получен ответ – 2 балла. Баллы суммируются.

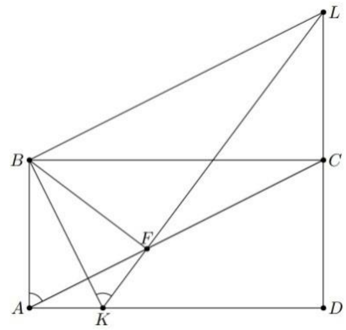
3. На доске 6×6 расставлены 6 фишек так, что в каждом горизонтальном и вертикальном ряду стоит по одной фишке. Можно ли оставшуюся часть доски замостить прямоугольниками 1×2 (в любом положении)?

Ответ: нельзя.

Решение. Раскрасим доску в шахматном порядке и занумеруем строки и столбцы. Если оставшуюся часть доски можно замостить прямоугольниками 1×2, то она содержит одинаковое число чёрных и белых клеток, тогда 3 фишки стоят на чёрных клетках, и 3 на белых. Заметим, что у белой клетки сумма номера строки и столбца чётна, а у чёрной – нечётна. Следовательно, сумма номеров строк и столбцов, в которых стоят фишки, нечётна (как сумма трёх чётных и трёх нечётных чисел). Но поскольку фишки стоят на каждой горизонтали и каждой вертикали, то сумма номеров строк и столбцов равна $2(1+\cdots+6)$, что является чётным числом. Полученное противоречие доказывает, что замостить доску требуемым образом нельзя.

Комментарий. Ответ без обоснования – 0 баллов. При отсутствии решения за потенциально полезные идеи и подходы – 2-3 балла.

4. Через вершину B прямоугольника $ABCD$ провели две перпендикулярные прямые. Одна прямая пересекает сторону AD в точке K, другая прямая пересекает продолжение стороны CD в точке L. Прямые KL и AC пересекаются в точке F. Докажите, что четырёхугольник $ABFK$ можно вписать в окружность.



Решение. Так как $\angle ABK = \angle ABL - \angle KBL = \angle ABL - 90^{\circ} = \angle ABL - \angle ABC = \angle CBL$, то прямоугольные треугольники ABK и CBL подобны. Отсюда $\frac{AB}{BC} = \frac{BK}{BL}$, тогда $\frac{AB}{BK} = \frac{BC}{BL}$ и прямоугольные треугольники ABC и KBL также подобны, поэтому $\angle BKF = \angle BAF$. Следовательно, четырехугольник $ABFK$ – вписанный.

Комментарий. 7 баллов за полное решение задачи данным способом можно разложить следующим образом: доказано подобие первой пары треугольников ABK и CBL – 3 балла, доказано подобие второй пары треугольников ABC и KBL – 3 балла; доказано, что данный четырехугольник является вписанным – 1 балл. Если решение не доведено до конца, за доказательство полезных вспомогательных утверждений – 1-3 балла.

5. Пусть $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, где a, b и c – различные целые ненулевые числа. При каких a, b и c выполняются равенства $f(a) = a^3$ *и* $f(b) = b^3$?

Ответ: $a = -2$, $b = 4$, $c = 16$.

Решение. Равенства $f(a) = a^3$ и $f(b) = b^3$ дают нам равенства $a^3 + ab + c = 0$ и $ab^2 + b^2 + c = 0$. Вычитая одно из другого, получаем $(a+1)b^2 - ab - a^3 = 0$. Это выражение раскладывается на множители

$$(a+1)b^2 - ab - a^3 = (b-a)\big((a+1)b + a^2\big) = 0.$$

Так как a и b различны, то $(a+1)b+a^2=0$. Отсюда видно, что $a \neq -1$. Значит, $b=\frac{-a^2}{a+1}$. Число b – целое, поэтому a^2 должно делиться на $a+1$. В то же время числа a^2 и $a+1$ взаимно просты. Поэтому нужно рассмотреть случаи $a+1=1$ и $a+1=-1$. Первый случай не подходит, так как $a \neq 0$, второй дает решение $a=-2$, $b=4$, $c=16$. Легко проверить, что эти числа удовлетворяют всем условиям.

Комментарий. Ответ найден подбором, показано, что ответ удовлетворяет всем условиям, но не доказана его единственность – 2 балла. За арифметические ошибки при верных рассуждениях снижать на 1–3 балла. Утверждение «числа a^2 и $a+1$ взаимно просты» можно использовать без доказательства.