# Всероссийская олимпиада школьников по математике
# 2016 – 2017 учебный год
# Муниципальный этап
# Ответы 10 класс

1. У вас есть мешок сахарного песка, чашечные весы, гиря в $1\,кг$ и бумажные пакеты, в которые можно фасовать сахар. Требуется отмерить $50\,кг$ сахара, затратив не более 6 взвешиваний. Как это сделать?

***Решение***. Обозначим через $Г$ гирю в $1\,кг$. Правой и левой частям равенств соответствует правая и левая чашка весов.

1шаг: $1\,кг\;(сахара) = Г$;

2 шаг: $1\,кг + Г = 2\,кг$;

3 шаг: $1\,кг + 2\,кг + Г = 4\,кг$;

4 шаг: $1\,кг + 2\,кг + 4\,кг + Г = 8\,кг$;

5 шаг: $1\,кг + 2\,кг + 4\,кг + 8\,кг + Г = 16\,кг$;

6 шаг: $1\,кг + 2\,кг + 4\,кг + 8\,кг + 16\,кг + Г = 32\,кг$.

Пакеты в $32\,кг$, $16\,кг$ и $2\,кг$ составляют в сумме требуемые $50\,кг$ сахара.

***Критерии проверки***. Любая последовательность шагов, удовлетворяющая условиям задачи, оценивается в 7 баллов.

2. Уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет корни. Верно ли, что если $0 < \alpha \le 1$, то уравнение $\alpha x^2 + px + q = 0$ тоже имеет корни? Корнями считаются только действительные числа.

***Ответ***: да, верно.

***Решение***. Так как первое уравнение имеет действительные корни, то $p^2 - 4q \ge 0$. Докажем, что дискриминант второго уравнения $D = p^2 - 4\alpha q$ неотрицателен. Если $q \le 0$, то, очевидно, $D \ge 0$. Если же $q > 0$, то $D = p^2 - 4q + 4q(1-\alpha) > 0$, что и требовалось.

***Критерии проверки.*** Рассмотрены не все случаи знака $q$ – не более 4 баллов.

3. Диагонали $AC$ и $BD$ выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке $O$. Известно, что площадь треугольника $AOB$ равна площади треугольника $COD$, а площадь треугольника $AOD$ – площади треугольника $BOC$. Докажите, что $ABCD$ параллелограмм.

***Решение***. Из условий задачи следует, что площади треугольников $ABC$ и $ADC$ равны. Следовательно, равны высоты этих треугольников, опущенные на сторону $AC$. Значит, у треугольников $AOB$ и $COD$ равны площади и высоты, опущенные на стороны $AO$ и $CO$ соответственно. Отсюда следует, что $AO = CO$, т.е. диагональ $AC$ делится точкой $O$ пополам. Аналогично рассуждая, доказываем, что диагональ $BD$ тоже делится точкой $O$ пополам. Следовательно, $ABCD$ – параллелограмм.

4. Докажите, что существуют две бесконечные последовательности целых чисел $\{m_k\}$ и $\{n_k\}$, такие, что все числа в каждой последовательности различны, а обе последовательности $\left\{\sqrt{n_k + m_k^2}\right\}$ и $\left\{\sqrt{n_k - m_k^2}\right\}$ тоже состоят из целых чисел.

***Решение***. Пусть $n = 5k^2$, $m = 2k$, где $k = 0,1,2,...$

Тогда $\sqrt{n_k + m_k^2} = \sqrt{5k^2 + 4k^2} = 3k$, $\sqrt{n_k - m_k^2} = \sqrt{5k^2 - 4k^2} = k$, что и требовалось.

***Замечание.*** Существует множество других решений.

***Критерии проверки.*** Построение любой бесконечной последовательности, удовлетворяющей условиям задачи, оценивается в 7 баллов. Способ задания последовательности тоже может быть любой – явный (как в решении), рекуррентный, описательный.

5. На доске написаны все целые числа от 1 до 100. Митя и Дима по очереди стирают по одному числу, пока на доске не останется два числа. Если их сумма делится на 7, выиграл Митя, если не делится – Дима. Первым ходит Митя. Кто выигрывает, если игроки не допускают ошибок?

***Ответ***: выигрывает Дима.

***Решение***. Дима обеспечит себе победу, если будет придерживаться следующей стратегии. Сначала он мысленно разбивает все числа на пары: 1 и 100, 2 и 99, 3 и 98, …, 50 и 51. Далее, какое бы число ни стер Митя, Дима стирает второе число *из той же пары.* В итоге на доске останется какая-то одна из перечисленных выше пар. Так как сумма чисел в каждой паре равна 101, а 101 не делится на 7, то Дима выигрывает.

***Критерии проверки***. За правильный ответ без указания стратегии – 1 балл. Любая другая правильная стратегия игры за Диму (таких стратегий много) – 7 баллов. Рассмотрение любого количества примеров без указания стратегии решением не считается, но можно добавлять баллы за содержательные идеи (например, за идею разбиения чисел на пары).