Муниципальный этап

Всероссийской олимпиады школьников

по математике Алтайский край

2016 – 2017 учебный год

Барнаул 2016

Сборник содержит материалы для проведения муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике в Алтайском крае. Задания составлены члены предметно-методической комиссии муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников 2016/2017 учебного года олимпиады школьников по математике Саженков А.Н., Оскорбин Д. Н., Саженкова Т.В., Папин А.А. (Алтайский государственный университет).

Рекомендации по проверке олимпиадных работ

Любое правильное решение оценивается в 7 баллов.

Недопустимо снятие баллов за слишком длинное решение, или за решение школьника, отличающееся от приведенного в методических разработках.

Важно отметить, что исправления в работе (зачеркивания ранее написанного текста) не являются основанием для снятия баллов

В то же время, любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

Жюри рассматривает записи решений, приведенные в чистовике. Черновик рассматривается только в случае отсутствия решения в чистовике.

Каждая работа должна быть оценена двумя членами Жюри. В случае расхождения их оценок вопрос об окончательном определении баллов, выставляемых за решение указанной задачи, определяется председателем Жюри или назначенным им старшим по классу.

Критерии оценивания

7 баллов – Полное верное решение.

6-7 баллов – Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.

5-6 баллов – Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.

4 балла – Применять в исключительных случаях, с обязательным утверждением председателем Жюри или назначенным им старшим по классу.

2–3 балла – Задача не решена, но сделано существенное продвижение в решении задачи.

1 балл – Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).

0 баллов – Решение неверное, продвижения в решении отсутствуют.

Особенности олимпиады 5-6-7 классов. Следует учитывать, что школьники, впервые принимающие участие в олимпиаде, особенно учащиеся 5-6-7 класса, не умеют чётко записывать объяснения в своих решениях. Поэтому в 5-6-7 классах нужно оценивать степень понимания решения, а не качество его записи.

11 класс

11.1. В каждой клетке таблицы 6 × 6 записаны числа. При этом все числа в верхней строке и все числа в левом столбце одинаковые. Каждое из остальных чисел таблицы совпадает с суммой чисел, записанных в двух соседних клетках – клетке слева и клетке сверху. Какое число может быть записано в угловой клетке слева вверху, если в угловой клетке справа снизу записано число 2016?

Ответ: 8. Обозначим a – число, которое записано в угловой клетке слева вверху. Тогда последовательно заполняется таблица. Для правого нижнего угла получаем соотношение $252a = 2016$, откуда следует, что a = 8.

a	a	a	a	a	a
a	$2a$	$3a$	$4a$	$5a$	$6a$
a	$3a$	$6a$	$10a$	$15a$	$21a$
a	$4a$	$10a$	$20a$	$35a$	$56a$
a	$5a$	$15a$	$35a$	$70a$	$126a$
a	$6a$	$21a$	$56a$	$126a$	$252a$

Комментарий. Ответ с цепочкой вычислений – 7 баллов. Ответ получен с использованием комбинаторных соображений – треугольника Паскаля – 7 баллов.

11.2. Найдите множество значений функции $f\left(x\right)=\sin^2 x+\cos x$.

Ответ: множеством значений функции является отрезок [–1; 5/4].

С одной стороны, $f\left(x\right)=\sin^2 x+\cos x \ge 0-1=-1$ и эта оценка достигается $f\left(\pi\right)=-1$.

С другой стороны, $f\left(x\right)=1+\cos x-\cos^2 x=5/4-\left(1/2-\cos x\right)^2 \le 5/4$. Эта оценка достигается $f\left(\pi/3\right)=5/4$.

Итак, функция удовлетворяет неравенству $-1\le f\left(x\right)\le 5/4$, и принимает все промежуточные значения на отрезке [π/3; π], поскольку является непрерывной.

Второе решение. Заметим, что множество значений $f\left(x\right)=1+\cos x-\cos^2 x$ совпадает с множеством значений функции $g(t)=1+t-t^2, -1\le t\le 1$. Функция g(t) непрерывна на отрезке [-1; 1], поэтому ее множество значений есть отрезок $\left[\min\limits_{t\in[-1,1]} g(t), \max\limits_{t\in[-1,1]} g(t)\right]$. Имеем: $g'(t)=1-2t$, функция на [–1; 1] имеет единственную критическую точку $t=\dfrac{1}{2}$. Найдем значения функции в критической точке и на концах отрезка: $g(-1)=-1; g\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{5}{4}; g(1)=1$. Отсюда следует, что $\min\limits_{t\in[-1,1]} g(t)=-1$ и $\max\limits_{t\in[-1,1]} g(t)=\dfrac{5}{4}$, а искомое множество значений есть $\left[-1;\dfrac{5}{4}\right]$. Заметим, что множество значений можно было найти также, построив график квадратичной функции $g(t)=1+t-t^2, -1\le t\le 1$.

Комментарий. Только ответ – 1 балл.

11.3. Имеются четыре кулька с сахаром и чашечные весы без гирь. Известно, что веса кульков образуют геометрическую прогрессию (отличную от постоянной прогрессии). Как с помощью двух взвешиваний определить самый тяжелый кулек?

Рассмотрим четыре положительных числа 1, q, q^2, q^3 ($q \neq 1$). Заметим, что выполняется неравенство $1+q^3 > q+q^2$. Действительно,

$$q^3+1-q^2-q=(q+1)\left(q^2-q+1\right)-q(q+1)=(q+1)(q-1)^2>0.$$

Отметим, что среди этих четырех чисел 1 и q^3 являются самым большим и самым маленьким из них. Это означает, что если на чаши весов положить по два кулька, то всегда перевесит чаша, на которой самый тяжелый кулек.

Итак, положим кульки a и b на одну чашу c и d на другую. Из доказанного неравенства следует, что одна из чаш перевесит. Пусть $a + b > c + d$. Второе взвешивание a и c на одну чашу b и d на другую. Если чаша с a и c перевесит, то a – самый тяжелый кулек, если нет, то b.

Комментарий. Разбор отдельных частных случаев – 0 баллов. Предъявлен правильный алгоритм взвешиваний без обоснования – до 3 баллов.

11.4. Набор составных чисел из множества {1, 2, 3, 4, …, 2016} назовем *хорошим*, если любые два числа этого набора не имеют общих делителей (отличных от 1). Какое максимальное количество чисел может иметь хороший набор?

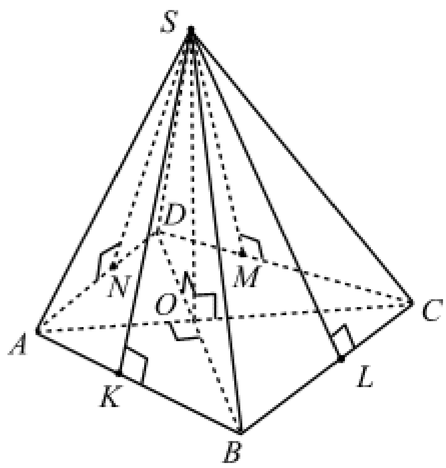
Ответ: 14 чисел.

Пример. 2^2, 3^2, 5^2, 7^2, 11^2, 13^2, 17^2, 19^2, 23^2, 29^2, 31^2, 37^2, 41^2, 43^2. Все представленные числа составные, поскольку являются квадратами натуральных чисел, больших 1. Ясно, также, что различные простые числа не имеют общих делителей, больших 1.

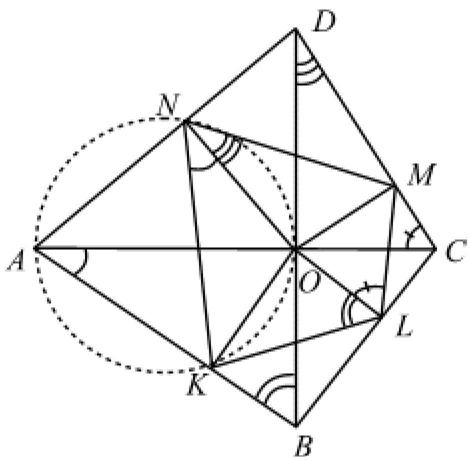
Оценка. Допустим набор составных чисел $a_1, a_2,\ldots, a_n$ удовлетворяет условию задачи и $a_1 < a_2 <\ldots< a_n$. Заметим тогда, что выполняется неравенство $p_n^2 \le a_n$, где p_n есть n–ое по возрастанию простое число. Обозначим $q_1, q_2,\ldots, q_n$ минимальные простые числа в разложении составных чисел $a_1, a_2,\ldots, a_n$. Если при некотором индексе k, $1\le k < n$, выполняется неравенство $p_n < q_k$, то $p_n^2 < q_k^2 \le a_k < a_n$. Если такого индекса нет, то простое q_n больше чем какие-то n – 1 простое число. Это означает, что $p_n^2 \le q_n^2 \le a_n$. Итак, если найдется набор составных чисел $a_1, a_2,\ldots, a_{15}$ удовлетворяющий условию задачи $a_1 < a_2 <\ldots< a_{15}$, то $2209 = 47^2 = p_{15}^2 \le a_{15}$. Противоречие.

Комментарий. Ответ – 1 балл, пример – 2 балла, оценка – 3 балла. За продвижение баллы суммируются.

11.5. В четырехугольной пирамиде *SABCD* диагонали основания *AC* и *BD* перпендикулярны друг другу и пересекаются в точке *O*, кроме того, отрезок *SO* перпендикулярен плоскости основания. Из вершины *S* опущены перпендикуляры на прямые, содержащие стороны четырехугольника *ABCD*. Докажите, что основания этих перпендикуляров лежат на окружности.



Обозначим основания перпендикуляров *K*, *L*, *M*, *N*. Соединим их с точкой *O*. По теореме о трех перпендикулярах отрезки *OK*, *OL*, *OM* и *ON* будут перпендикулярны прямым, содержащим соответственно стороны *AB*, *BC*, *CD* и *DA*. Далее, в прямоугольном треугольнике *AOB* основание высоты, опущенной из вершины прямого угла *O*, лежит на гипотенузе. Это означает, что точки *K*, *L*, *M*, *N* лежат на сторонах основания пирамиды.



Рассмотрим теперь основание пирамиды. В четырехугольнике *AKON* углы *K* и *N* – прямые, значит, около него можно описать окружность. Следовательно, углы *OAK* и *ONK* равны, поскольку опираются на одну дугу *OK*.

Точно также равны пары углов *OBK* и *OLK*, *ODM* и *ONM*, *OCM* и *OLM*. Осталось заметить, что углы *L* и *N* четырехугольника *KLMN* в сумме равны сумме острых углов двух прямоугольных треугольников, то есть 180° и около него можно описать окружность.