ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
2016-2017 УЧЕБНЫЙ ГОД

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

11 КЛАСС

Общее количество баллов **35. Решение каждой задачи оценивается Жюри из 7 баллов** в соответствии с критериями и методикой оценки, разработанной центральной предметно-методической комиссией:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения.
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако решение содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3-4	Верно рассмотрен один из существенных случаев.
2	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии правильного решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Указания к оцениванию отдельных задач содержатся в комментариях к решениям.

1. Второй член бесконечной убывающей геометрической прогрессии равен 3. Найдите наименьшее возможное значение суммы A этой прогрессии, если известно, что $A > 0$.

Ответ: 12.

Решение. Обозначим первый член прогрессии – a, знаменатель – q. Сумма прогрессии A равна $\frac{a}{1-q}$. Из условия следует, что $3 = aq$, откуда $a = {}^{3}/_{q}$. Следовательно, надо найти наименьшее значение $A = \frac{3}{q(1-q)}$. Заметим, что из условия следует: $0 < q < 1$. Число A принимает наименьшее значение, когда знаменатель дроби $q(1-q)$ максимален, но $(-q^2 + q)$ имеет точку максимума при $q = {}^{1}/_{2}$, и наибольшее значение $q(1-q)$ равно ${}^{1}/_{4}$. Тогда наименьшее возможное значение $A = {}^{3}/_{1/4} = 12$.

Комментарий. Сумма A представлена как функция одной величины – 3 балла.

2. Найдите геометрическое место точек $(x_z; y_z)$, являющихся вершинами парабол $y = ax^2 + zx + c$, где a и c – фиксированные положительные числа, а z принимает все действительные значения.

Ответ: парабола $y_z = -a{x_z}^2 + c$.

Решение. Вершина параболы $y = ax^2 + zx + c$ имеет координаты $x_z = -\frac{z}{2a}$, $y_z = -a\left(\frac{z}{2a}\right)^2 + c = -a{x_z}^2 + c$. Таким образом, любая вершина лежит на параболе $y_z = -a{x_z}^2 + c$. Теперь надо еще показать, что любая точка этой линии является вершиной параболы $y = ax^2 + zx + c$. Если уравнение параболы можно записать в виде $y = a(x - x_0)^2 + y_0$, то точка $(x_0,;\ y_0)$ является вершиной этой параболы. Возьмём на параболе $y_z = -a{x_z}^2 + c$ произвольную точку M с координатами $(x_0,;\ y_0)$, где $y_0 = -a{x_0}^2 + c$. Но $a(x - x_0)^2 + y_0 = a(x - x_0)^2 - a{x_0}^2 + c = ax^2 - 2axx_0 + c,$ что соответствует выражению $ax^2 + zx + c$ при $z = -2ax_0$. Следовательно, для произвольной точки M параболы $y_z = -a{x_z}^2 + c$ мы нашли значение z, при котором точка M является вершиной параболы $y = ax^2 + zx + c$.

Комментарий. Записаны координаты вершины параболы, данной в условии – 1 балл. Найдено уравнение линии вершин – 3 балла. Показано, что любая точка этой линии является вершиной – ещё 3 балла. Баллы суммируются.

3. В шахматном турнире на кубок города Красноярска участвовали мальчики и девочки из школ города. Каждый игрок играл с каждым по одной партии, за победу давалось 1 очко, за ничью – 0,5, за поражение – 0. По окончании турнира оказалось, что каждый участник набрал ровно половину своих очков в матчах с мальчиками. Докажите, что количество участников турнира является квадратом целого числа.

Решение. Пусть в турнире участвовали n мальчиков и k девочек. Поскольку каждый мальчик набрал половину своих очков в матчах с мальчиками, то количество очков, набранных мальчиками в матчах с девочками, равно количеству очков, набранных мальчиками в матчах между собой, то есть $\frac{1}{2}n(n-1)$. Аналогично, количество очков, набранных девочками в матчах с мальчиками, равно количеству очков, набранных девочками в матчах между собой, то есть $\frac{1}{2}k(k-1)$. Сумма очков, набранных мальчиками в матчах с девочками, и очков, набранных девочками в матчах с мальчиками, равна количеству матчей между девочками и мальчиками, то есть nk. Таким образом, $k(k-1)+n(n-1)=2nk$, то есть $k^2-k+n^2-n=2nk$, откуда $n+k=(k-n)^2$.

Комментарий. В данном решении баллы распределяются следующим образом. Если количество набранных очков верно записано через выбранные переменные – от 1 до 3 баллов (1 балл – если некоторое число очков получено одним способом; 3 балла, если получены выражения, позволяющие составить уравнение; 2 балла – за промежуточные продвижения). Составлено верное уравнение – ещё 2 балла. Выделен полный квадрат – ещё 2 балла.

4. В основании четырехугольной пирамиды лежит квадрат $ABCD$, сторона которого равна 2, а боковое ребро SA перпендикулярно плоскости основания и тоже равно 2. Через боковое ребро SC и точку, принадлежащую стороне AB, проведена плоскость так, что полученное сечение пирамиды имеет наименьший периметр. Найдите площадь сечения.

Ответ: $\sqrt{6}$.

Решение. Длина ребра $SC=\sqrt{2^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2}=2\sqrt{3}$. Пусть сечение проводится через точку M стороны AB. Чтобы периметр сечения был минимален, необходимо, чтобы была минимальна сумма $SM+MC$. Рассмотрим развертку граней SAB и $ABCD$ в виде трапеции $SADC$ (точка A лежит на основании SD). На ней SMC – ломаная, сумма $SM+MC$ – ее длина, она минимальна, если точка M лежит на прямой SC. Тогда M – середина ребра AB. Отрезки SM и MC равны $\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$. Высота равнобедренного треугольника SMC, опущенная на основание SC, равна $\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\frac{2\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{2}$, а площадь равна $\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{6}$.

Комментарий. Возможны другие способы решения. Например, можно использовать исследование функции с помощью производной. Если сечение наименьшего периметра не найдено – 0 баллов. Если указано (без доказательства) сечение наименьшего периметра, а затем верно найдена его площадь – 2 балла. Если проводилось исследование функции, при этом правильно найден корень производной, но не доказано, что корень – точка наименьшего значения, а затем верно найдена площадь сечения – 3 балла. За ошибки в алгебраических преобразованиях при правильной логике решения оценка снижается на 1-2 балла.

5. Положительное целое N и N^2 оканчиваются на одну и ту же последовательность цифр $\overline{abcd}$, причем a – ненулевая цифра. Найти $\overline{abc}$.

Ответ: 937.

Решение. Представим число N в виде $10000M+k$, где k и M – натуральные числа, причем $1000\le k\le 9999$. Поскольку N и N^2 оканчиваются на одну и ту же последовательность цифр, то разность

$$N^2-N=(10^4M+k)^2-(10^4M+k)=10^4(10^4M^2+2Mk-M)+k^2-k$$

оканчивается на $\overline{0000}$. Таким образом, $k^2-k=k(k-1)$ делится на $10000=2^4\cdot 5^4$. В то же время, числа k и $k-1$ взаимно просты. Поэтому возможны четыре случая

1) если k делится на 10^4, то $k=0$;

2) если $k-1$ делится на 10^4, то $k=1$;

3) если k делится на 5^4 и $k-1$ делится на 2^4, то $k=625$;

4) если k делится на 2^4 и $k-1$ делится на 5^4, то $k-1=625m$ (m – натуральное число), причём $625m+1$ делится на 16. Так как $625 \equiv 1 \pmod{16}$, $15 \cdot 625 \equiv 15 \pmod{16}$ и $15 \cdot 625 + 1 = 9376$ делится на 16, то $k = 9376$.

Первые три случая невозможны, так как $1000 \le k \le 9999$, а четвертый случай даёт решение. Итак, $\overline{abc} = 937$.

Комментарий. Доказано, что $N^2 - N$ делится на $2^4 \cdot 5^4$ – 1 балл, замечено, что числа k и $k-1$ (или N и $N-1$) взаимно просты – 1 балл, установлено, что числа k и $k-1$ не могут содержать одновременно множители 2 и 5 – 1 балл, найден верный ответ – 2 балла, доказано, что других возможностей нет – 2 балла. Баллы суммируются.