Решения олимпиадных заданий муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников по математике 2016-2017 учебного года

11-й класс.

11.1. Какое число больше: $\sin^2 89^0$ или $\cos 2^0$? Ответ должен быть строго обоснован без использования калькулятора.

***Решение*.** $sin^2 89°=cos^2 1° > 2cos^2 1° - 1=cos^2 1° - sin^2 1° = \cos 2°$.

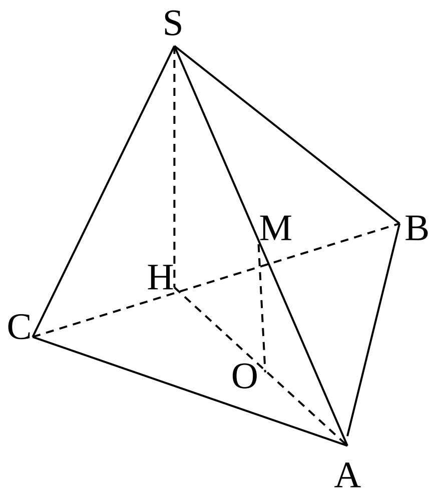
Ответ: $sin^2 89°$ больше.

11.2. Графики функций $f(x)=ax+b$ ($a\neq 0$) и $y=f(f(x))$ не могут пересечься в четвёртой четверти. Докажите это.

***Решение*.** Предположим, что графики пересеклись в четвертой четверти $x>0$, $y<0$. Пусть (x_0,y_0) точка пересечения. Тогда имеем $f(x_0)=f(f(x_0))$. Так как функция $f(x)$ монотонна, то $x_0=f(x_0)$. Последнее равенство невозможно: у нас $x_0>0$, а $f(x_0)=y_0< 0$.

11.3. Середина ребра SA треугольной пирамиды SABC равноудалена от всех вершин пирамиды. Пусть SH - высота пирамиды. Докажите, что точка H не лежит внутри треугольника ABC.

***Решение*.** См. рис.



M-середина ребра SA. Спроектируем ребро SA на плоскость (ABC): точка S проектируется в точку H (так что SH - высота пирамиды), точка M - в точку O. Так как по условию равны наклонные MA, MB и MC, то равны и их проекции OA, OB и OC, т.е. точка O равноудалена от A, B и C и, следовательно, является центром описанной окружности треугольника ABC. OA является радиусом этой окружности, а так как O- середина отрезка AH, то AH- диаметр, то точка H лежит на описанной окружности треугольника ABC и, стало быть, не может находиться внутри треугольника ABC.

11.4. Рабочие должны уложить плитками квадратный пол из 36 клеток (одинаковых квадратов). У рабочих имеется 12 плиток. 11 полосок из трёх клеток и один уголок из трёх клеток. Смогут ли рабочие выполнить задание ? Разрезать плитки нельзя.

Решение. Предположим, что клетчатый квадрат 6×6 удалось разбить на 11 полосок размера 3×1 и один уголок из трех клеток. Поставим в каждой клетке одно из чисел 1, 2, 3 так, как показано на рис.

1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3
1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3

Рассмотрим сумму S всех чисел в этом квадрате, Очевидно S делится на 3. С другой стороны, S является суммой 12 чисел, являющихся суммами трех чисел, расположенных в полосках и уголке. Заметим, что сумма чисел в любой полоске - горизонтальной или вертикальной - кратна трем. А вот сумма чисел в уголке в любом случае на 3 не делится. Поэтому S, будучи суммой 11 чисел, кратных 3, и одного числа, не делящегося 3, само на 3 не делится. Противоречие - с предположением о возможности укладки.

Ответ: не смогут.

11.5. Существуют ли натуральные числа a и b, большие 1000, такие, что для любого натурального числа c, являющегося точным квадратом, три числа a, b и c не являются длинами сторон треугольника ?

Решение. Положительные числа a, b, c тогда и только тогда являются длинами сторон треугольника, когда выполнены три неравенства треугольника: $a+b>c$, $a+c>b$, $b+c>a$. При дополнительном условии $a<b$ получается система двух неравенств $a+b>c$, $a+c>b$. Запишем: $b=a+h$, $h>0$. Имеем: треугольник существует, только если $2a+h>c$ и $c>h$. Подходящий нам пример натуральных $a>1000$ и h мы получим, если выберем их так, чтобы в интервале $(h; 2a + h)$ не оказалось ни одного точного квадрата. Это легко: в качестве a возьмем любое число >1000, $a=t$, в качестве h возьмем t^2; тогда $2a+h= 2t+t^2=(t+1)^2-1$; тогда интервал между h и $2a+h$ - это интервал, целиком лежащий между двумя последовательными точными квадратами t^2 и $(t+1)^2$, и никаких точных квадратов этот интервал не содержит.

Ответ: существуют.