ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2016/2017 гг.
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
МАТЕМАТИКА
11 КЛАСС

Решения и критерии проверки.

1. **Решение.** Да, можно. Например, годится следующая расстановка.

0	1	-1	0
-1	0	0	1
0	-1	1	0
1	0	0	-1

Критерии проверки. Любой правильный пример – 7 баллов. В противном случае – 0 баллов.

2. **Ответ:** 7,2. **Решение.** Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед, AB=12, AD=16, $AA_1=x$, X – центр грани AA_1D_1D, Y – центр грани CC_1D_1D, Z – центр грани $A_1B_1C_1D_1$. Тогда по теореме Пифагора получаем $XY=10, XZ=\sqrt{\frac{x^2}{4}+36}, YZ=\sqrt{\frac{x^2}{4}+64}$. Из условия следует, что высота ZH остроугольного (как видно из теоремы косинусов) треугольника XYZ равна 6. Вновь используя теорему Пифагора, получаем $YH=\frac{x}{2}, XH=\sqrt{\frac{x^2}{4}+28} \Rightarrow 10=\frac{x}{2}+\sqrt{\frac{x^2}{4}+28} \Rightarrow x=7{,}2$.

Критерии проверки. Верное решение – 7 баллов. Нет обоснования остроугольности треугольника с вершинами в центрах граней (и соответственно, не обосновано положение высоты треугольника) – 5 баллов. Иррациональное уравнение составлено верно, но не решено – 1 балл. В остальных случаях – 0 баллов.

3. **Ответ:** четыре. **Решение.** Квадратный трёхчлен $3x^2–7x+2$ имеет корни 2 и 1/3. Поэтому в наборе простые числа встречаются четыре раза: 3, 7, 2, 2. Все пять чисел набора простыми быть не могут, поскольку по теореме Виета $ax_1x_2=c$, а простое число не может быть произведением трёх простых.

Критерии проверки. Верное решение – 7 баллов. Пример без оценки с точным указанием простых чисел – 3 балла. Оценка без примера – 2 балла. В остальных случаях – 0 баллов.

4. **Решение.** Пусть $a \geq b \geq c$ – стороны треугольника, R – радиус описанной окружности. Тогда в силу неравенства треугольника $2R \geq 2a$ и $\sin A=\frac{a}{2R}\leq\frac{1}{2}$. В силу возрастания синуса от 0 до π угол A либо больше 150 градусов, либо меньше 30 градусов. Но второй вариант невозможен, поскольку угол A – наибольший в треугольнике.

Критерии проверки. Верное решение – 7 баллов. Доказано только, что у одного из углов треугольника синус не меньше 0,5 – 3 балла. Отсутствует ссылка на монотонность синуса – снимается 2 балла. В остальных случаях – 0 баллов.

5. Ответ: 1. **Решение.** Пусть $A(a,\ a^2)$, $B(b,\ b^2)$ – произвольные точки параболы. Тогда по теореме Пифагора $a^2+a^4+b^2+b^4=(a-b)^2+(a^2-b^2)^2 \Leftrightarrow ab=-1$. Отсюда находим выражение для площади треугольника: $2S=\sqrt{a^2+a^4}\cdot\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^4}}=\sqrt{2+\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)}\geq 2$ (последнее неравенство вытекает из неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим). Ясно, что значение 1 достигается для равнобедренного треугольника с вершинами O, $A(1,\ 1)$, $B(-1,1)$.

Критерии проверки. Верное решение – 7 баллов. Нужное неравенство доказано, но не указано, что существует треугольник с такой площадью – 5 баллов. Получено соотношение между координатами точек на параболе, дальнейших продвижений нет – 1 балл. Получено соотношение между координатами и выписана формула для площади, но оценка на площадь не сделана – 2 балла. В остальных случаях – 0 баллов.

6. Решение. Будем сперва действовать по следующей схеме: $1,2,3,\ldots,n-3,n-2,n-1,n\to 1,2,3,\ldots,n-3,n-1,n-1\to 1,2,3,\ldots,n-3,n-1$. Действуя таким образом, придём к набору 1, 2, 3,…, 1000, 1002. Затем будем действовать по той же схеме с другого конца:

$$1,2,3,\ldots,1000,1002\to 2,2,4,\ldots,1000,1002\to 2,4,5,\ldots,1000,1002\to 3,5,\ldots,1000,1002$$
$$\to 4,6,\ldots,1000,1002\to 5,7,\ldots,1000,1002\to\ldots\to 997,999,1000,1002\to 998,1000,1002$$
$$\to 1000,1000\to 1000$$

Критерии проверки. Верный алгоритм – 7 баллов. В остальных случаях – 0 баллов.