Всероссийская олимпиада школьников по математике
2016 – 2017 учебный год
Муниципальный этап
Ответы 11 класс

1. Известно, что квадратичная функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ при каждом целом x принимает целое значение. Следует ли отсюда, что все числа $a,\ b$ и c целые?

Ответ. нет.

Решение. Функция $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$ принимает при каждом целом x целое значение, так как $f(x) = \frac{x(x+1)}{2}$ и одно из чисел x и $x+1$ является чётным.

Замечание. Данный пример не единственный.

Комментарий. Правильный ответ без примера — 0 баллов.

Указан правильный пример, но не объяснено почему он подходит — 5 баллов.

2. К числам на доске разрешается дописывать число, равное среднему арифметическому двух или нескольких из них, если оно отлично от всех уже написанных чисел. Вначале на доске были написаны числа 0 и 1. Докажите, что после нескольких таких операций можно получить на доске число $\frac{1}{5}$.

Решение. Первым шагом получим $\frac{1}{2}$, как среднее арифметическое 0 и 1. Теперь в наборе $0, \frac{1}{2}, 1$ найдём среднее арифметическое соседних чисел. Получим набор $0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$. Снова найдём среднее арифметическое соседних чисел, получим набор вида $\frac{k}{8}$, где k целое от 0 до 8. Наконец, ещё раз применяя эту процедуру получим набор из чисел $\frac{k}{16}$, где k целое от 0 до 16.

Осталось заметить, что $\frac{1}{5} = \frac{\frac{1}{16}+\frac{2}{16}+\frac{3}{16}+\frac{4}{16}+\frac{6}{16}}{5}$, значит его можно получить.

Замечание. Получить $\frac{1}{5}$ можно и другими способами.

Комментарий. Доказано, что можно получить набор вида $\frac{k}{8}$, $0 \le k \le 8$ или набор вида $\frac{k}{16}$, $0 \le k \le 16$ — 2 балла.

3. Дана клетчатая таблица 101×101, клетки которой покрашены в белый цвет. Разрешается выбрать несколько строк и перекрасить все клетки этих строк в чёрный цвет. Затем выбрать ровно столько же столбцов и перекрасить все клетки этих столбцов в противоположный цвет (то есть белые — в чёрный, и чёрные — в белый). Какое наибольшее число чёрных клеток может содержать таблица после этой операции?

Ответ. 5100.

Решение. Пусть перекрашивается сначала k строк, затем k столбцов. После первого этапа перекрашивания каждый столбец будет содержать k чёрных и $101-k$ белых клеток. Так как $101-k$ столбцов будут нетронуты, то суммарно в таких столбцах будет $k(101-k)$ чёрных клеток. В каждом из перекрашенных столбцов $101-k$ чёрных клеток, значит суммарно в таких столбцах $(101-k)k$ чёрных клеток. Итак, всего чёрных клеток $f(k)=2k(101-k)$. Понятно, что графиком функции $f(x)=2x(101-x)$ является парабола, ветви которой смотрят вниз. Значит наибольшее значение функции $f(x)=2x(101-x)$ достигается в точке $a=\frac{101}{2}$, и функция сначала возрастает до этой точки, а потом убывает. Но значит при любых целых k выполнено $f(k) \leq f(50)$ при $0 \leq k \leq 50$ и $f(k) \leq f(51)$ при $51 \leq k \leq 101$. Остаётся заметить, что $f(50)=f(51)=5100$.

Замечание. Анализ поведения функции $f(x)$ может быть проведён с использованием производной. Из того факта, что наибольшее значение функции $f(x)$ достигается в точке $a=\frac{101}{2}$, не следует вывод о том, что функция $f(k)$ (по целым k) должна достигать наибольшего значения в одной из ближайших к a целых точек. Хотя это верно для нашей функции, в общем случае существует контрпример. Для верного вывода нужна ссылка на монотонность.

Комментарий. Только ответ — 1 балл.

В решении получена явная формула для числа чёрных клеток (от k) — не менее 3 баллов.

Необоснованный вывод о том, что наибольшее значение есть $f(50)$ или $f(51)$ — не более 4 баллов.

4. В правильном треугольнике ABC на сторонах AC, AB и BC выбраны соответственно точки N, T и F так, что $AN = TB$ и $CF = FB$. Докажите, что площадь четырёхугольника $TANF$ равна половине площади треугольника ABC.

Первое решение. Площадь треугольника ABC равна сумме площадей треугольников CNF и FTB и четырёхугольника $TANF$. Докажем, что $S_{\Delta CNF} + S_{\Delta FTB} = \frac{1}{2}S_{\Delta ABC}$, отсюда сразу будет следовать, что площадь $TANF$ равна оставшейся половине.

Обозначим сторону треугольника ABC за a, NA за b. Тогда $CF = FB = \frac{1}{2}a$, $CN = b - a$. Заметим сразу, что $S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

$S_{\Delta CNF} + S_{\Delta FTB} = \frac{1}{2} \cdot CN \cdot CF \cdot \sin 60° + \frac{1}{2} \cdot BT \cdot BF \cdot \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{8}(a-b)a + \frac{\sqrt{3}}{8}ba = \frac{\sqrt{3}}{8}a^2$, что есть половина площади треугольника ABC.

Второе решение. Треугольники CFA и BFA равны (например, по двум сторонам и углу между ними: $CF = FB$ по условию, $AC = AB$ и $\angle ACF = \angle ABF = 60°$, так как треугольник ABC правильный). Отсюда следует, что площадь треугольника ABF равна половине площади треугольника ABC. Также из равенства $\Delta CFA = \Delta BFA$ следует равенство высот треугольников CFA и BFA, проведенных из точки F. Но эти высоты являются также высотами треугольников NAF и FTB, и так как $AN = TB$, то площади треугольников NAF и FTB равны. Осталось заметить, что $S_{TANF} = S_{\Delta NAF} + S_{\Delta ATF} = S_{\Delta FTB} + S_{\Delta ATF} = S_{\Delta ABF} = \frac{1}{2}S_{\Delta ABC}$.

Замечание. Баллы не снижаются, если без доказательства используются нижеперечисленные факты. Медиана AF есть биссектриса и высота в треугольнике ABC. $AF = \frac{\sqrt{3}}{2}AB$, $S_{\Delta ABF} = \frac{1}{2}S_{\Delta ABC}$, $\Delta CFA = \Delta BFA$.

Комментарий. Если доказательство использует равенство высот треугольников NAF и FTB, но не приводится доказательство этого факта (и в остальном доказательство верно) — 5 баллов.

5. Ненулевые действительные числа x, y, z и t таковы, что $x + y + z + t = 0$ и $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} = 0$. Докажите, что из чисел x, y, z и t можно выбрать два числа с нулевой суммой.

Решение. Допустим, что сумма любых двух из данных чисел не равна нулю и придём к противоречию. Из первого равенства следует, что $z + t = -(x + y)$. Так как $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} = 0$, то $\frac{x+y}{xy} + \frac{t+z}{zt} = 0$, значит $(x + y)\left(\frac{1}{xy} - \frac{1}{zt}\right) = 0$. В силу предположения $x + y \neq 0$, значит $\frac{1}{xy} - \frac{1}{zt} = 0$, $\frac{1}{xy} = \frac{1}{zt}$, $xy = zt$. Аналогично получаем, что $xz = yt$ и $xt = yz$.

Если сложить равенства $xy = zt$ и $xz = yt$, получим $x(y + z) = t(y + z)$. В силу предположения $y + z \neq 0$, значит $x = t$. Складывая равенства $xy = zt$ и $xt = yz$, и проводя аналогичное рассуждение получим, что $x = z$. Наконец, из последнего возможного варианта получаем, что $x = y$. Так как $x + y + z + t = 0$, то $4x = 0$, $x = 0$, что противоречит условию. Итак, наше исходное предположение ложно, значит найдутся два числа с нулевой суммой.

Комментарий. Если на каком-то этапе получена верная формула вида

$(x + y)f(x; y; s; t) = 0$, но дальнейшее решение не является верным: например, только на основании этого равенства делается вывод о том, что $x + y = 0$ — 2 балла.

Получено равенство вида $xy = zt$ — 3 балла.