Департамент образования Ярославской области
Всероссийская олимпиада школьников 2016/2017 учебного года

Математика, 11 класс, муниципальный этап

Решения и указания по проверке

Каждая задача оценивается из 7 баллов в соответствии с критериями и методикой оценки, разработанной центральной предметно-методической комиссией по математике.
Все решения, если не указано противное, требуют обоснования.
Если решения нет, то независимо от продвижения, ставить не более 3 баллов.
Если решения не совпадают с приведенными, читайте внимательно!

Баллы	Правильность (ошибочность) решения.
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка + пример» верно построен пример.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

1. Все выпускники математической школы сдавали ЕГЭ по математике и физкультуре. Результат каждого ученика по математике оказался равен сумме результатов остальных учеников по физкультуре. Сколько выпускников в школе, если всего по математике учениками в сумме было набрано в 50 раз больше баллов, чем по физкультуре?

Ответ: 51.

Решение:
Пусть всего выпускников n. Обозначим сумму баллов, набранных учениками по математике за M. Эта сумма равна сумме баллов по физкультуре всех учеников, учтенных $(n-1)$ раз.

Таким образом, имеем уравнение: $M = 50\dfrac{M}{n-1}$.

Отсюда – ответ.

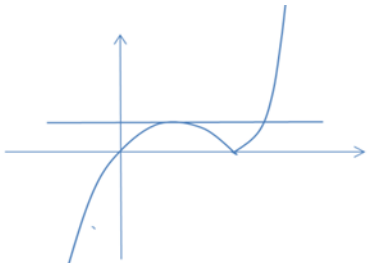
Указания по проверке:
Если задача решена при дополнительных предположениях, например, что все набрали одинаковые баллы, то ставить 1 балл.

2. Сколько решений при различных значениях а имеет уравнение $x \cdot |x - a| = a$?

<u>Ответ</u>:
при $-4 < a < 4$ – одно решение,
при $a = -4$ и $a = 4$ – два решения,
при $a < -4$ и $a > 4$ – три решения.

Решение:
При $a = 0$ уравнение имеет единственный корень ($x = 0$).

При $a > 0$ построим график функции $y = x\,|x - a|$ – схематично он изображен на рисунке справа.



Исследуем, сколько точек пересечения имеет график этой функции с прямой $y = a$ в зависимости от значений параметра (это и будет соответствовать количеству корней уравнения $x|x - a| = a$). Ордината вершины параболы (дуги параболы) равна $a^2/4$.
Отметим, что при $a = 4$: $a^2/4 = a$, то есть прямая $y = a$ проходит через вершину параболы, а также пересекает возрастающую ветвь параболы – то есть, соответствующее уравнение имеет два корня при $a = 4$.
При $a > 4$ вершина параболы лежит выше прямой $y = a$, поэтому эта прямая дважды пересекает соответствующую дугу параболы (в точках с абсциссами меньше a), а также пересекает возрастающую ветвь параболы (в точке с абсциссой больше a) – это дает три точки пересечения (поэтому при $a > 4$ уравнение имеет 3 корня). При $0 < a < 4$ вершина параболы лежит ниже прямой $y = a$, поэтому прямая $y = a$ пересекает только возрастающую ветвь параболы (в точке с абсциссой больше a) – соответственно, уравнение имеет 1 корень.

Аналогично рассматриваются значения $a < 0$ (график симметричен рассмотренному выше относительно начала координат):
при $a = -2$ прямая $y = a$ пересекает график функции $y = x\,|x - a|$ в двух точках (в вершине параболы и в возрастающей ветви параболы в точке с абсциссой меньше a),
при $a < -4$ три точки пересечения (и уравнение имеет 3 корня),
при $-4 < a < 0$ одна точка пересечения (1 корень).

Таким образом, ответ:
при $-4 < a < 4$ – одно решение,
при $a = -4$ и $a = 4$ – два решения,
при $a < -4$ и $a > 4$ – три решения.

<u>Указания по проверке:</u>
При любом пропущенном случае ставить не выше 2 баллов.

3. Внутри параллелограмма *ABCD* взята точка *E* такая, что $ED = CD$. Точки *K* и *M* – середины отрезков *BE* и *AD* соответственно. Докажите, что прямая *KM* параллельна биссектрисе угла *CDE*.

Доказательство:
Пусть *L* – середина отрезка *CE*. Биссектриса угла *CDE* является медианой в равнобедренном треугольнике *CDE*.
Таким образом, *KL* – средняя линия в треугольнике *BCE*.
Значит, она параллельна сторонам исходного параллелограмма и равна их половине.

Итак, четырехугольник *KLDM* – параллелограмм, и нужные нам отрезки являются его противоположными сторонами, значит, параллельны.
Ч.т.д.

4. Буквы А, Б, К, М, П, У, Ш закодировали последовательностями нулей и единиц (каждую – своей). Затем в слове ПАПАМАМАБАБУШКА заменили буквы их кодами. Могла ли длина получившейся последовательности оказаться короче 40 символов, если последовательность однозначно раскодируется?

<u>Ответ</u>: Могла.

Решение:
Вот пример таблицы кодов:

А	Б	К	М	П	У	Ш
0	110	1111	100	101	11100	11101

Слово будет выглядеть так: 10101010100010001100110111001110111110 – всего 38 символов. Раскодирование однозначно. Чтобы в этом убедиться, начните с левого края. Самым левым может быть только код 101, т.к. ни один другой код не начинается с такого же сочетания символов. Далее – аналогично, т.к. ни один код не начинается с комбинации символов, совпадающих с каким-либо другим кодом.

<u>Комментарий:</u>
Равномерный код (по 3 символа на букву) дает 45 знаков. Поэтому, необходимо использовать для разных букв коды переменной длины. Чем чаще встречается буква, тем короче должен быть у нее код. Это соображение может помочь при проверке. Будьте внимательны.

Участники могут обосновать однозначность раскодирования не последовательным рассмотрением кодовой последовательности (слева направо), а сославшись на верный факт, относящийся к кодировкам такого вида. Приведенный код является примером так называемого префиксного кода – код любой буквы не является началом кода никакой другой буквы (условие Фано), а для него верна теорема об однозначности раскодирования. Ссылку на соответствующую теорему можно засчитывать как обоснование (естественно, при условии корректной её формулировки).

<u>Указания по проверке:</u>
Оценка – либо 0, если ответ неправильный или таблица кодов не дает нужного результата, либо 4 балла, если коды правильные, но нет обоснования однозначности раскодирования, либо 7 баллов.

5. Пусть $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$. Докажите, что среди чисел $p(1), p(2), \ldots, p(2016)$ квадратов целых чисел столько же, сколько среди чисел $p(1) - 1, p(2) - 1, \ldots, p(2016) - 1$.

Доказательство:
Заметим, что $p(x) = (x - 1)^2\ (2x + 1)$, а $p(x) - 1 = x^2\ (2x - 3)$.
При целом x ($1 \le x \le 2016$) число $p(x) = (x - 1)^2 (2x + 1)$ является квадратом целого или при $x = 1$ ($p(1) = 0$), или (при $x \ge 2$) тогда, когда квадратом целого является число $2x + 1$.
Отметим, что при $x \ge 2$ верно неравенство: $5 \le 2x + 1 \le 4033$, а также что $2x + 1$ нечетно.
Такими квадратами являются числа 9 (при $x = 4$), 25 (при $x = 12$), 49 (при $x = 24$) и т.д. до $63^2 = 3969$ (при $x = 1984$) – то есть, мы рассмотрели квадраты нечётных чисел от 3^2 до 63^2

(всего их 31). Вместе с ранее найденным квадратом при $x = 1$ получаем 32 точных квадрата среди чисел указанного вида.

Что касается $p(x) - 1 = x^2(2x - 3)$, то это выражение не равно 0 при рассматриваемых значениях x, а является точным квадратом тогда и только тогда, когда квадратом целого является число $2x - 3$. Отметим, что при целом x ($1 \le x \le 2016$): $-1 \le 2x - 3 \le 4029$ и нечётно. Помимо рассмотренных выше значений (нечетных точных квадратов), появляется дополнительно 1^2 (соответствует здесь $x = 2$), зато не достигается значение 0^2. Поэтому по сравнению с предыдущим многочленом (появился один нечетный точный квадрат и исчез 0^2) количество точных квадратов среди значений многочлена (теперь уже $p(x) - 1$) осталось прежним.

Указания по проверке:

Если сделан правильный подсчет количества квадратов, но только в одном случае, 3 балла.