**Для педагога**

**Всероссийская олимпиада школьников 2016г**
**муниципальный этап**
**Математика**
**7 класс**

Общее время выполнения работы – **3 часа (180 мин).**
Максимальное количество баллов **– 35.**

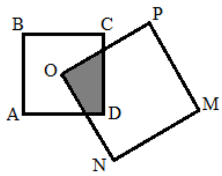
**Общие критерии оценки:**
7 баллов ставится за полностью решенную задачу.
6-7 баллов ставится, если решение верное, но имеются небольшие недочеты.
5-6 баллов ставится, если решение в целом верное, но имеются существенные ошибки, не влияющие на логику рассуждений.
4 балла ставится, если верно рассмотрен один из двух (более сложный) случай, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3 балла ставится, если получены вспомогательные утверждения, помогающие при решении задачи.
1 балл ставится, если рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0 баллов, ставится, если нет продвижений в решении, даже если при этом дан верный ответ.
Решение школьника не обязано совпадать с предложенными, тогда оно оценивается также в соответствии указанной выше схемой оценок.

**Задание 1**
Ваня считает, что дроби "сокращают", зачёркивая одинаковые цифры в числителе и знаменателе. Серёжа заметил, что иногда Ваня получает верные равенства, например, $\frac{49}{98}=\frac{4}{8}$. Найдите все правильные дроби с числителем и знаменателем, состоящими из двух ненулевых цифр, которые можно так "сократить".
**Количество баллов 7**
**Ответ:**
$^{26}/_{65}$, $^{16}/_{64}$, $^{19}/_{95}$, $^{49}/_{98}$
**Решение**
Рассмотрим все возможные случаи сокращений.
1) $\frac{\overline{ba}}{\overline{bc}}$ (сокращение на цифру $b$). Получаем $(10b + a)c = (10b + c)a$, $bc = ba$.
$b \neq 0$, следовательно, $c = a$, а по условию дробь правильная. Поэтому решений нет.
2) $\frac{\overline{ab}}{\overline{cb}}$. Аналогично первому случаю получаем, что решений тоже нет.
3) $\frac{\overline{ba}}{\overline{cb}}$. Получаем $(10b + a)c = (10c + b)a$, откуда $9c(a – b) = b(c – a)$. Так как дробь правильная, то $a < c$. Следовательно, $a > b$, откуда $a – b \geq 1$.
$9c(a – b) \geq 9c > 9(c – a) \geq b(c – a)$, то есть $9c(a – b) > b(c – a)$, что невозможно.
4) $\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}}$. Тогда $(10a + b)c = (10b + c)a$, откуда $9a(b – c) = b(c – a)$. Как в предыдущем случае замечаем, что $b > c > a$. Значит, $c – a$ не может равняться 9, поэтому $b$ кратно 3.
Если $b = 3$, то $c = 2$, $a = 1$. Но эти значения не удовлетворяют уравнению.
Если $b = 6$, то $c – a = 3$, откуда $c = 5$, $a = 2$ или $c = 4$, $a = 3$. Оба варианта годятся.

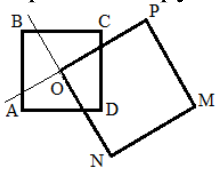
Если $b = 9$, то $a(9 - c) = c - a$, то есть $10a = c(a + 1)$. Так как $a$ и $a + 1$ взаимно просты, то 10 делится на $a + 1$. Значит, $a = 1$ или $a = 4$, откуда, соответственно, $c = 5$ или $c = 8$.

**Задание 2**
В классе 15 девочек и 14 мальчиков. На 8 марта каждый из мальчиков поздравил с праздником некоторых девочек. Могло ли оказаться так, что все мальчики поздравили одинаковое число девочек, но все девочки получили разное количество поздравлений?
**Количество баллов 7**
**Ответ:**
Не могло
**Решение**
Девочка могла получить от нуля до 14 поздравлений. Если все девочки получили разное число поздравлений, то эти разные числа – в точности все целые от 0 до 14. Но их сумма равна $0+1+...+14 = 7\cdot 15$ не делится на 14. А должна бы, поскольку это и есть общее число поздравлений, сделанных мальчиками. Противоречие.

**Задание 3**
На плоскости расположены два квадрата ABCD и MNOP (см. рисунок). Известно, что AB = 8, MN = 11, точка O – центр квадрата ABCD, а отрезки OP и DC пересекаются под углом $50^0$. Найдите площадь общей части двух квадратов.




**Количество баллов 7**
**Ответ:**
16
**Решение**
Прямые PO и NO (см. рис.) разбивают квадрат ABCD на четыре равные части (эти части переходят друг в друга при повороте на $90^0$).




Поэтому площадь общей части двух квадратов равна четверти площади квадрата ABCD.
**Второй способ.**
Можно разрезать фигуру на две части, из которых составляется квадрат.
**Замечание**
Ответ не зависит от угла, под которым пересекаются стороны квадратов.
**Оценивание**
За верное решение – 7 баллов. Если высказана идея второго решения (но без точных обоснований), – 2-3 балла.

**Задание 4**
Три человека Антон, Борис и Семен пересчитали кучу шариков четырёх цветов, результаты подсчетов показаны в таблице.

| | красный | оранжевый | желтый | Зеленый |
|---|---|---|---|---|
| Антон | 12 | 15 | 17 | 19 |
| Борис | 12 | 14 | 19 | 18 |
| Семен | 14 | 12 | 18 | 19 |

При этом каждый из них правильно различал какие-то два цвета, а два других мог путать: один путал красный и оранжевый, другой – оранжевый и жёлтый, а третий – жёлтый и зелёный. Результаты их подсчётов приведены в таблице.
Сколько шариков каждого цвета было на самом деле?

**Количество баллов 7**

**Ответ:**

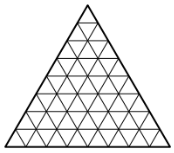
красных – 12, оранжевых – 14, жёлтых – 18, зелёных – 19

**Решение**

Ошибиться при подсчёте красных шариков мог только один из них, а двое правильно сосчитали число красных шариков. Поэтому красных шариков было 12. В подсчёте красных шариков ошибся Семен, значит, он путал красные с оранжевыми, а жёлтые и зелёные считал правильно. Получаем, что жёлтых – 18, а зелёных – 19. Все оставшиеся шарики – оранжевые. Общее число шариков все считали правильно – 63. Значит, оранжевых шариков было 14.

**Задание 5**

Равносторонний треугольник со стороной 8 разделили на равносторонние треугольнички со стороной 1 (см. рис.). Какое наименьшее количество треугольничков надо закрасить, чтобы все точки пересечения линий (в том числе и те, что на границе) были вершинами хотя бы одного закрашенного треугольничка?



**Количество баллов 7**

**Ответ:**

15 треугольничков

**Решение**

Всего точек пересечения линий 1 + 2 + 3 + ... + 9 = 45, а у треугольничка три вершины, так что по крайней мере 45 : 3 = 15 треугольничков придётся закрасить. Пример с 15 треугольничками см. на рисунке.