Олимпиадные задачи муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников по математике (условия и ответы) 2016-2017 уч.год

7 класс

Задача 1. Компания школьников решила купить пиццу. Каждая пицца порезана на 12 частей. Они подсчитали, что если каждый мальчик съест по 7 кусков, а каждая девочка – по 2 куска, то трех пицц не хватит. Если же купить четыре пиццы, то каждому мальчику хватит по 8 кусков, а каждой девочке – по 4 куска, и еще останется. Сколько мальчиков и сколько девочек в этой компании?

Ответ: 1 девочка и 5 мальчиков.

Решение: Обозначим количество мальчиков за m, а девочек – за d. Заметим, что $7m+2d > 36$, $8m+4d < 48$. Но $8m+4d$ – число, кратное 4, поэтому $8m+4d \le 44$, $4m+2d \le 22$. Вычитаем это из первого неравенства и получаем, что $3m > 14$, откуда $m \ge 5$. Но тогда из неравенства $4m+2d \le 22$ получаем, что $d \le 1$, откуда либо $d=0$, либо $d=1$. Если $d=0$, то $7m > 36$, $m > 5$, и $8m \le 44$, $m \le 5$, противоречие. Если $d = 1$, то $7m > 34$, $m \ge 5$, и $8m \le 40$, $m \le 5$, откуда $m=5$.

Задача 2.
Четверо ребят – Алёша, Боря, Ваня и Гриша – соревновались в беге. На следующий день на вопрос, кто какое место занял, они ответили так:
Алёша: Я не был ни первым, ни последним.
Боря: Я не был последним.
Ваня: Я был первым.
Гриша: Я был последним.
Известно, что три из этих ответов правильные, а один - неверный. Кто сказал неправду? Кто был первым?
***Ответ**:* Неправду сказал Ваня. Первым был Боря.

Решение. Если предположить, что неправду сказал Алёша, то получится, что он был первым или последним, тогда неправду сказал ещё либо Ваня, либо Гриша, а это противоречит условию – неправду сказал только один из мальчиков. Аналогично рассматриваются и все другие возможности

Задача 3. Фишка движется по доске 2016 Ч 2016, раскрашенной в шахматном порядке, следующим образом: каждый нечетный ход она перемещается в соседнюю клетку по вертикали или по горизонтали, а каждый четный ход она перемещается так же, как и шахматный конь. Могла ли фишка, начав с левого нижнего угла, обойти все поля доски и закончить движение в правом верхнем углу?

Решение. Всего фишка сделала нечётное число ходов, а именно,2016^2-1.

Так как цвет клетки, по которым она движется, чередуется, то цвет клетки, в которой оказался конец пути фишки, должен отличаться от цвета клетки, из которой фишка начала путь. Но клетки, в которых путь начался и закончился, одного цвета, следовательно, фишка не могла проделать путь, указанный в условии задачи.

Задача 4

В 500 ящиках лежат яблоки. Известно, что ящик может вместить не более 240 яблок. Докажите, что, по крайней мере, 3 ящика содержат по одинаковому числу яблок.

Указание. Пронумеруем все ящики. Обозначим через a_i (i= 1, 2, … 500) – количество яблок, содержащихся в i-м ящике. Поскольку каждое a_i не превышает 240, а всего ящиков 500, то среди них (согласно принципу Дирихле) найдутся, по крайней мере, 3 равных числа. В противном случае количество чисел должно было бы быть не меньше 240·3=720.

Задача 5

Эксперт представляет судье 9 одинаковых по внешнему виду монет. Судья знает, что среди представленных монет по три монеты весом 1, 2 и 3 грамма. Эксперт сообщил судье, какая монета сколько весит, а также он принес с собой прибор, который за одну операцию с двумя группами монет сообщает, весят ли эти группы одинаково, или нет. За какое наименьшее число операций эксперт сможет доказать судье, что каждая монета действительно весит столько, сколько он сказал?

Ответ: за 2.

Решение. Сначала эксперт сравнит три монеты весом 3 г со всеми остальными. Ответ прибора «одинаково» означает, что в каждой группе монеты весят половину общего веса всех монет. Три монеты могут весить половину общего веса всех монет, в том случае, если все они весят по 3 г. Затем эксперт сравнит три однограммовых монеты с одной уже известной трёхграммовой. Равновесие доказывает, что все три монеты - действительно однограммовые: иначе они вместе весили бы больше 3 г.

Что-то доказать за одно взвешивание можно только в случае, когда и на каждой чаше весов, и среди не лежащих на весах все монеты одного веса (иначе мы не сможем отличить две монеты разного веса, лежащие на одной чашке или не лежащие на весах). Но ясно, что при любом таком взвешивании одна из чашек перевесит, и мы ничего не узнаем.