Для педагога

Всероссийская олимпиада школьников 2016г
муниципальный этап
Математика
9 класс

Общее время выполнения работы – **3 часа 55 мин (235 мин).**
Максимальное количество баллов – **35.**

Общие критерии оценки:
7 баллов ставится за полностью решенную задачу.
6-7 баллов ставится, если решение верное, но имеются небольшие недочеты.
5-6 баллов ставится, если решение в целом верное, но имеются существенные ошибки, не влияющие на логику рассуждений.
4 балла ставится, если верно рассмотрен один из двух (более сложный) случай, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3 балла ставится, если получены вспомогательные утверждения, помогающие при решении задачи.
1 балл ставится, если рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0 баллов, ставится, если нет продвижений в решении, даже если при этом дан верный ответ.
Решение школьника не обязано совпадать с предложенными, тогда оно оценивается также в соответствии указанной выше схемой оценок.

Задание 1

Существует ли многочлен степени 8 со старшим коэффициентом $\frac{1}{2016}$, который во всех целых точках принимает целые значения?
Количество баллов 7
Ответ:
да
Решение
Примером такого многочлена является многочлен
$$P(x)=\frac{1}{2016}x(x+1)(x+2)\dots(x+6)(x+7)$$
Действительно, среди 8 последовательных целых чисел x, x + 1 ,x + 2, ..., x + 7 найдется число, кратное 7, два числа, кратные 3, 4 числа, кратные 2 причем по крайней степени два из них кратны 4. Поэтому их произведение кратно 7·3·3·2·2·2·4 = 2016.

Задание 2
Существует ли выпуклый четырехугольник, диагонали которого перпендикулярны, а стороны равны 3, 5, 7, 4.
Количество баллов 7
Ответ:
не существует
Решение
Во-первых, заметим, что рассматриваемый четырехугольник с перпендикулярными диагоналями не обязан быть ромбом или квадратом.
Что бы это понять, достаточно построить два взаимно перпендикулярных отрезка, пересекающихся не посередине.
Исследуем свойства, которыми обладают такие четырехугольники. Обозначим

четырехугольник через ABCD, а точку пересечения диагоналей через O.
Запишем теорему Пифагора для прямоугольных треугольников *AOB*, *BOC*, *COD* и *DOA*:
$AB^2=AO^2+BO^2$,
$BC^2=BO^2+CO^2$,
$CD^2=CO^2+DO^2$,
$DA^2=DO^2+AO^2$.
Сложим первую формулу с третьей, а вторую с четвертой:
$AB^2+CD^2=AO^2+BO^2+CO^2+DO^2$,
$BC^2+DA^2=AO^2+BO^2+CO^2+DO^2$.
Правые части в этих уравнениях равны, поэтому и левые части равны:
$AB^2+CD^2=BC^2+DA^2$
Перейдем теперь к непосредственному решению задачи.
По условиям три стороны четырехугольника имеют нечетную длину, а одна – четную.
Поэтому с одной стороны в последнем равенстве будет стоять сумма двух нечетных чисел, а с другой – сумма четного и нечетного числа.
Поэтому последнее равенство для четырехугольника с данными сторонами выполняться не может.

Задание 3
Доказать, что для любых натуральных n и m выполнено:
$$\left|m\sqrt{3}-n\right|>\frac{1}{2m+n}.$$
Количество баллов 7
Решение
Заметим, что
$$\alpha=\left|m\sqrt{3}-n\right|=\frac{\left|\left(m\sqrt{3}-n\right)\left(m\sqrt{3}+n\right)\right|}{\left(m\sqrt{3}+n\right)}=\frac{\left|3m^2-n^2\right|}{m\sqrt{3}+n}.$$
Так как $\sqrt{3}$ - иррационально, то $\left|3m^2-n^2\right|\geq 1$. Поэтому
$$\alpha\geq\frac{1}{m\sqrt{3}+n}>\frac{1}{2m+n},$$
что и требовалось доказать.

Задание 4
Пусть ABC – остроугольный треугольник и D – середина BC. Выберем на отрезке AD произвольную точку E и обозначим через M ее проекцию на BC. В свою очередь, точки P и N есть проекции M на AC и AB. Доказать, что угол MPE равен углу MNE.
Количество баллов 7
Решение
Пусть *B’* и *C’* – точки пересечения со сторонами *AC* и *AB* прямой, проходящей через *E* и параллельной *BC*.
Так как $B'E=EC'$, а отрезок *EM* перпендикулярен *B’C’* и *BC*, то треугольник *B’C’M* – равнобедренный.
Кроме того, четырехугольники *MPB’E* и *MEC’N* вписаны в окружности (у них по паре прямых противоположных углов).
Поэтому имеет место цепочка равенств для углов:
$\angle MPE=\angle NB'E=\angle MC'E=\angle MNE$
Что и требовалось доказать.

Задание 5
Дана дробь

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot 2015}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2016}$$
в числителе которой записано произведение всех нечетных натуральных чисел, не превышающих 2016, а в знаменателе произведение всех четных натуральных чисел, не превышающих 2016.

Сравнить эту дробь с дробью $\frac{1}{60}$.

Количество баллов 7

Ответ:

заданная дробь больше дроби 1/60

Решение

Пусть
$$x=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot 2015}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2016}$$
Заметим, что:
$$n^2>(n-1)(n+1)$$
Значит:
$$5^2>4\cdot 6,\quad 7^2>6\cdot 8,\ldots$$
Тогда
$$x^2=\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot \ldots \cdot 2015^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot \ldots \cdot 2016^2}>\frac{1^2\cdot 3^2\cdot (4\cdot 6)\cdot \ldots \cdot (2014\cdot 2016)}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot \ldots \cdot 2016^2}=\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 4\cdot 2016}{2^2\cdot 4^2\cdot 2016^2}=\frac{1}{3584}>\frac{1}{60^2}$$
Значит
$$x>\frac{1}{60}$$