9 класс

9.1. **а)** Дан треугольник, у которого высоты равны 4; 5; 6. Какой это треугольник: остроугольный, прямоугольный или тупоугольный? **б)** Существует ли треугольник, у которого высоты равны 2; 3; 6?

Ответ: **а)** остроугольный; **б)** не существует. **Указание**. Из формулы площади треугольника $S = ah/2$ следует, что стороны данного треугольника равны $\frac{2S}{4};\frac{2S}{5};\frac{2S}{6}$ (такой треугольник существует, поскольку $\frac{1}{4}<\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$). Для того чтобы узнать, какой это треугольник, надо сравнить квадрат большей стороны с суммой квадратов других сторон. В данном случае из неравенства $\left(\frac{1}{4}\right)^2<\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{6}\right)^2$ следует, что треугольник остроугольный. **б)** Поскольку $\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$, неравенство треугольника не выполняется, и значит, такого треугольника не существует.

9.2. На шахматную доску поставили 8 ладей, которые не бьют друг друга. Докажите, что в любом «клетчатом» прямоугольнике размера 4×5 (клеток) есть хотя бы одна ладья..

Указание. См. задачу 8.2.

9.3. Дан остроугольный треугольник *ABC*. Точка *M* – точка пересечения его высот. Найдите угол *A*, если известно, что *AM* = *BC*.

Ответ: 45°. **Указание**. См. задачу 8.3.

9.4. Докажите, что существует натуральное число, которое делится на 5^{100} и состоит (в десятичной записи) только из нечетных цифр.

Указание. Докажем по индукции более общий факт: для любого натурального *n* существует число, составленное ровно из *n* нечетных цифр и делящееся на 5^n. База индукции легко проверяется для числа 5 (а также для 75, 375). Докажем индукционный переход: предположим, что число a_k составлено из *k* нечетных цифр и делится на 5^k, т.е. $a_k = 5^k \cdot p$ для некоторого целого *p*, и покажем, что к этому числу можно приписать слева нечетную цифру *x* так, чтобы число $\overline{xa_k}$ делилось на 5^{k+1}, т.е. $x\cdot10^k + p\cdot5^k$ должно делиться на 5^{k+1}, что равносильно тому, что $x\cdot2^k + p$ должно делиться на 5. Если брать в качестве *x* пять различных нечетных цифр 1, 3, 5, 7, 9, то числа $x\cdot2^k + p$ будут иметь разные остатки при делении на 5 (в противном случае для разных $x_1\cdot, x_2\cdot$число $(x_1\cdot2^k + p)-(x_2\cdot2^k + p)=(x_1-x_2)\cdot2^k$ делилось бы на 5). Значит, для какой-то нечетной цифры *x* число $x\cdot2^k + p$ делится на 5, что и требовалось.

9.5. Дан прямоугольник, у которого численное значение площади больше утроенного периметра. Докажите, что его периметр больше 48.

Указание. Пусть *a*, *b* – стороны прямоугольника. Из условия задачи $ab > 3(2a + 2b) \Leftrightarrow$

$$(a-6)(b-6) > 36 \quad (*)$$

Сначала проверим, что оба множителя $(a-6)$ и $(b-6)$ положительны. Действительно, в противном случае из (*) следует, что $a-6 < 0$, $b-6 < 0$. Тогда $-6 < a-6 < 0$, $-6 \le b-6 < 0$ и поэтому $(a-6)(b-6)=(6-a)(6-b)<6\cdot6=36$, что противоречит (*). Теперь для положительных чисел $(a-6)$ и $(b-6)$ можно воспользоваться неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим: $(a-6)+(b-6)\ge2\sqrt{(a-6)(b-6)}>12 \Rightarrow a+b>24 \Leftrightarrow P>48$.