ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
2016-2017 УЧЕБНЫЙ ГОД

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

9 КЛАСС

Общее количество баллов **35. Решение каждой задачи оценивается Жюри из 7 баллов** в соответствии с критериями и методикой оценки, разработанной центральной предметно-методической комиссией:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения.
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако решение содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3-4	Верно рассмотрен один из существенных случаев.
2	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии правильного решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Указания к оцениванию отдельных задач содержатся в комментариях к решениям.

1. Для отрицательных чисел a, b и c справедливы равенства $\frac{c}{a+b} = 2$ и $\frac{c}{b-a} = 3$. Что больше: c или a?

Ответ: $c < a$.

Решение. Из приведенных равенств следует:

$$2(a+b) = c = 3(b-a) \ \Rightarrow \ b = 5a \ \Rightarrow \ c = 12a.$$

Так как число a отрицательно, при умножении на 12 оно уменьшается. Поэтому $c < a$.

Комментарий. При отсутствии полного решения, если верно проделаны все преобразования и выражены два неизвестных через третье, но в конце дан неверный ответ из-за того, что не учтена отрицательность чисел – 2 балла. Если два неизвестных были выражены через третье (пусть неверно), и при получении ответа была учтена отрицательность чисел – 3 балла.

2. В круг выложили 30 бусин (голубых и зелёных). У 26 бусин соседней была голубая, а у 20 бусин соседней была зелёная. Сколько было голубых бусин?

Ответ: 18 голубых бусин.

Решение. Найдём число бусин, рядом с которыми была и голубая, и зелёная: $26 + 20 - 30 = 16$. Число бусин, рядом с которыми были только голубые, равно $26 - 16 = 10$. Число голубых бусин равно $\frac{10 \cdot 2 + 16}{2} = 18$. Приведем пример такого расположения. Обозначим голубую бусину (г), зеленую – (з). Пусть бусины по кругу располагаются в следующем порядке по часовой стрелке:

г з г г г г з г г г з г з г г г з з з г г з г г з з з г г з,

причем первая и последние бусины являются соседними. При этом все условия выполняются, и голубых бусин 18.

Комментарий. Если дан верный ответ, полученный подбором, и обоснованный примером расположения, но не показано, что не может быть других решений – 4 балла. За отсутствие примера баллы не снижать. За арифметические ошибки снимать 1-2 балла.

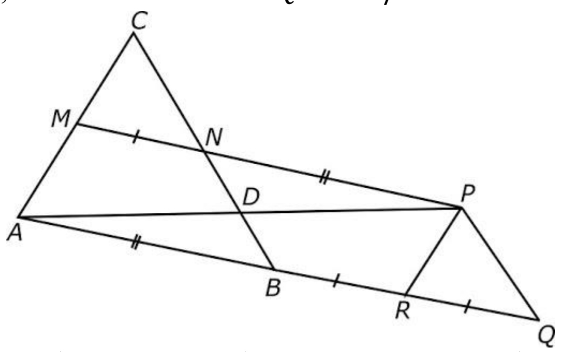
3. На олимпиаду приехали 64 участника. Оказалось, что у каждого не более 8 знакомых среди участников. Докажите что найдутся 8 попарно незнакомых между собой участников.

Решение. Пронумеруем людей от 1 до 64. Возьмём первого человека, он знаком не более, чем с 8 другими, следовательно, остаётся не менее $64 - 8 - 1 = 55$ людей, с которыми он не знаком. Возьмем второго человека из этих 55, он знаком не более, чем с 8 другими, следовательно, остаётся не менее $55 - 8 - 1 = 46$ людей, с которыми он не знаком (среди них есть и первый). Будем повторять тот же процесс с оставшимися на предыдущем шаге людьми. На каждом шаге выбирается один человек, который не знаком ни с одним из предыдущих по построению. На третьем шаге людей, не знакомых с выбранными, останется 37, на четвёртом 28, на пятом 19, на шестом 10, на седьмом 1. Таким образом, после 7-го шага останется один человек, не знакомый ни с одним из 7 выбранных. Мы получили 8 попарно незнакомых людей.

Комментарий. При отсутствии доказательства за потенциально полезные идеи 1–2 балла. Рассмотрение только частных случаев – 0 баллов.

4. Разрежьте произвольный треугольник со стороной a на 3 части, из которых можно сложить треугольник, в котором есть сторона длиной $2a$.

Решение. Рассмотрим произвольный треугольник ABC. Пусть сторона длины a – это AB. В треугольнике ABC проведем среднюю линию $MN \parallel AB$, на прямой MN отложим отрезок NP так, что $NP = AB$. На прямой AB за точку B отметим точки R и Q такие, что: $BR = MN = RQ = AB/2$.



Тогда так как $NP \parallel BQ, NP = BQ$, то $NPQB$ – параллелограмм. Значит, $PQ = NB = CN$, $\angle PQR = \angle PNB = \angle CNM$. Следовательно, $\Delta PQR = \Delta CNM$. Теперь докажем, что четырехугольники $AMND$ и $PRBD$ равны. $MP = AR$, $MP \parallel AR$, следовательно, $MPRA$ – параллелограмм. $NP = AB$, $NP \parallel AB$, следовательно, $NPBA$ – параллелограмм. Отсюда $AM = RP$ (так как $MPRA$ – параллелограмм), $MN = BR$ (по построению), $ND = DB, AD = DP$ (т.к. это диагонали в параллелограмме $NPBA$); $\angle NDA = \angle PDB$ (как вертикальные), $\angle MND = \angle DB$R (т.к. $MP \parallel AQ$), $\angle MAD = \angle DPR$ (т.к. $AM \parallel PR$), $\angle AMN = \angle PRB$ (т.к. $MPRA$ – параллелограмм). Отсюда $\Delta AMN = \Delta PRB$, $\Delta ADN = \Delta PDB$, и четырехугольники $AMND$ и $PRBD$ равны. Легко видеть, что равны и треугольники ADB и PDN. Следовательно, треугольник ABC можно разрезать так, чтобы получить треугольник APQ, где $AQ = AB + BQ = 2AB$.

Комментарий. Рассмотрен частный случай (доказательство проведено для треугольника определенного вида), но метод разрезания может быть применен к произвольному треугольнику – до 5 баллов; метод применим только к треугольникам определенного вида – 1-2 балла. Предложен верный метод разрезания, но доказательство отсутствует – 3 балла; если в доказательстве есть пробелы – до 5 баллов.

5. Вася и Петя играют в следующую игру. Вася называет ненулевую цифру, а Петя вставляет её вместо одной из звездочек в произведение $*** \times *** \times *** \times ***$, причем Вася видит, куда именно. Сможет ли Петя расставить цифры так, чтобы получившееся при этом произведение делилось на 9 независимо от того, какие цифры называл Вася?

Ответ: да, сможет.

Решение. Петя будет действовать так: цифры, дающие остаток 0 от деления на 3, он будет ставить в первое число; цифры, дающие остаток 1 от деления на 3, он будет ставить во второе число; а цифры, дающие остаток 2 от деления на 3, он будет ставить в третье число. Когда в одном из чисел закончатся места, он будет ставить цифры, которые поставил бы в это число, в четвертое число. Заметим, что когда заполняются два числа, то каждое из них будет делиться на 3, а значит, произведение четырех чисел будет делиться на 9.

Комментарий. Ответ без обоснования – 0 баллов. Верный ответ, полученный с помощью примеров (не указана оптимальная стратегия) – 1 балл. Оптимальная стратегия указана, но не обоснована – до 4 баллов.