Решения олимпиадных заданий муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников по математике 2016-2017 учебного года

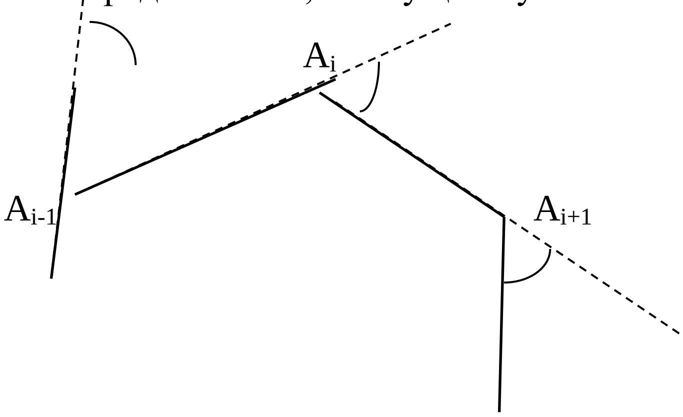
9 -й класс

9.1. Числа x=999 и x=1001 удовлетворяют неравенству $x^2+px+q<0$. Докажите, что дискриминант квадратного трёхчлена x^2+px+q больше 4.

Решение. Множество решений неравенства x^2+px+q < 0 представляет собой интервал (x_1, x_2), где $x_1 < x_2$ -корни трехчлена x^2+px+q. Поскольку, по условию, числа 999 и 1001 лежат в этом интервале, то x_2 - x >1001- 999 =2. Заметим, что x = $\sqrt{\mathrm{D}}$, т.е. D= $(x_2 - x_1)^2$. Поэтому D > 2^2 = 4.

9.2. Существует ли выпуклый 365 - угольник, все углы которого выражаются целым числом градусов ?

Решение. Предположим, что существует.



Тогда каждый из внешних углов многоугольника (см.рис.) выражается целым числом градусов и, во всяком случае, не меньше 1°. Поэтому сумма всех внешних углов не меньше 365°. Но известно (и просто доказывается), что сумма всех внешних углов равна 360°. Противоречие с предположением о существовании.

Ответ: не существует.

9.3. По пустыне равномерно движется караван верблюдов длиной в 1 км. Всадник проехал от конца каравана к началу и вернулся к концу каравана. За это время караван прошёл 1 км. Какой путь проехал всадник, если скорость его была постоянной ?

Решение. Станем следить за движением всадника В относительно конца К каравана. Пусть V-скорость каравана, W-скорость всадника. Сначала В удаляется от К со скоростью W-V, и через некоторое время t расстояние между В и К окажется равным 1 (т.е. В окажется в начале каравана). Тогда

(W-V) t_1 =1. (1)

Далее B приближается к K со скоростью W+V и через некоторое время t окажется рядом с K. Тогда

(W+V) t_2 =1. (2)

При этом за все время $t_1 + t_2$ точка K прошла расстояние 1;

V($t_1 + t_2$)=1. (3)

Выразив t_1 и t_2 из (1) и (2) и подставив в (3), получим

$$V\left(\frac{1}{W-V}+\frac{1}{W+V}\right)=1.$$

Из этого уравнения можно найти отношение $\frac{W}{V}=x$:

$V\left(\frac{1}{Vx-V}+\frac{1}{Vx+V}\right)=1$, $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}=1$, $\frac{2x}{x^2-1}=1$, $x^2 - 2x - 1 = 0$, $x=1+\sqrt{2}$.

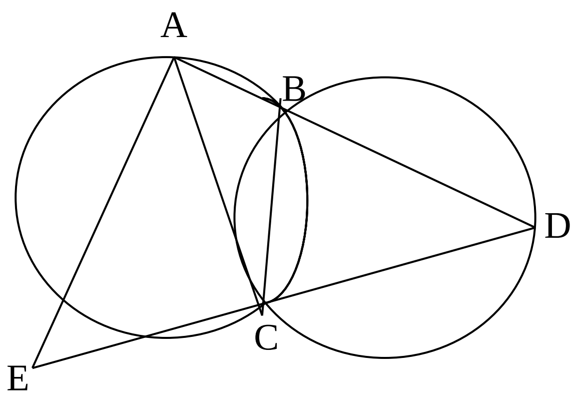
Умножив равенство (3) на $x=1+\sqrt{2}$, найдем W ($t_1 + t_2$) = $1+\sqrt{2}$.

Но величина W($t_1 + t_2$) есть как раз путь всадника.

Ответ: $(1+\sqrt{2})$ км.

9.4. Две окружности равных радиусов пересекаются в точках B и C. На первой окружности выбрана точка A. Луч AB пересекает вторую окружность в точке D (D≠B). На луче DC выбрана точка E так, что DC=CE. Докажите, что угол DAE - прямой.

***Решение*.** См. рис.



\

Общая хорда BC равных окружностей стягивает равные дуги, поэтому вписанные углы BDC и BAC, опирающиеся на эти дуги, равны. Но тогда треугольник ACD - равнобедренный, и AC=DC=CE. Это означает, что точка C является центром окружности, описанной около треугольника ADE, а отрезок DE служит ее диаметром. Угол DAE, опирающийся на диаметр, -прямой.

9.5. M - четырёхзначное число, составленное из ненулевых цифр, N - число, записанное теми же цифрами в обратном порядке. Докажите, что если M+ N делится на 101, то сумма двух крайних цифр числа M равна сумме двух средних цифр числа M.

Решение. Пусть M= $\overline{abcd}$ (a,b,c,d - цифры), т.е. M=1000a+100b+10c+d. Тогда N=1000d+100c+10b+a и M+N= 1001a+110b+110c+1001d.

В последней сумме выделим "по возможности большую часть, заведомо делящуюся на 101":

M+N=(1010-9)a+(101+9)b+(101+9)c+(1010-9)d=101(10a+b+c+10d)+9(-a+b+c -d)

Отсюда видно, что число M+N делится на 101, только если на 101 делится число -a + b + c - d. Но это число лежит, очевидно, в промежутке от -16 до 16, а в этом промежутке есть только одно число, делящееся на 101, - это число 0. Таким образом -a +b +c -d=0, т.е. a+d=b+c.