ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2016/2017 гг.
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
МАТЕМАТИКА
9 КЛАСС

Решения и критерии проверки.

1. **Решение**. Перегруппируем слагаемые следующим образом

$$\frac{x-36}{x-1}+\frac{x+36}{x+1}+\frac{x-18}{x-2}+\frac{x+18}{x+2}+\frac{x-12}{x-3}+\frac{x+12}{x+3}+\frac{x-9}{x-4}+\frac{x+9}{x+4}=$$
$$\frac{2x^2-72}{x^2-1}+\frac{2x^2-72}{x^2-1}+\frac{2x^2-72}{x^2-9}+\frac{2x^2-72}{x^2-16}$$

Теперь ясно, что числа ± 6 являются корнями этого уравнения. Можно просто угадать эти корни и сделать проверку. **Критерии проверки.** Приведены все преобразования, после которых один или оба корня становятся очевидными – 7 баллов. Хотя бы один корень угадан и сделана проверка – 7 баллов. В остальных случаях – 0 баллов.

2. **Ответ:** на 8 процентов. **Решение.** Возьмём за 1 плановую производительность труда (объём работы, выполняемый за 1 час). Тогда до удлинения смены рабочие выполняли за смену 6+1,5=7,5 единиц работы. А после удлинения 8+2,1=8,1 единиц. Значит, общая производительность за смену стала составлять 8,1:7,5×100%=108% от исходной, то есть увеличилась на 8%. **Критерии проверки.** Верное решение – 7 баллов. Первоначальная и окончательная производительность за смену верно выражена в условных единицах, но в процентах соотношение выражено неверно – 4 балла. В остальных случаях – 0 баллов.

3. **Ответ.**

1	5	**7**
4	8	2
6	3	**9**

Критерии проверки. Верный ответ (даже без каких либо объяснений и проверок) – 7 баллов. В остальных случаях – 0 баллов.

4. **Ответ.** 2:1. **Решение**. Проведём отрезки *PC* и *PD*. По свойству параллельных прямых $\angle PCD=\angle CPB$ и $\angle CDP=\angle APD$. Тогда, с учётом условия, получаем подобие треугольников *CPD* и *APD* и пропорцию $PD/PC=AP/AD$. Аналогично в силу равнобедренности трапеции получаем подобие треугольников *CPD* и *BPC* и пропорцию $PD/PC=BC/PB$. Перемножая эти пропорции и используя равенство $AD=BC$, получаем $(PD/PC)^2=AP/BP\Rightarrow PD/PC=2$. **Критерии проверки**. Верное решение – 7 баллов. Доказано подобие двух пар треугольников, но дальнейших продвижений нет – 2 балла. То же сделано только для одной пары треугольников – 1 балл. В остальных случаях – 0 баллов. **Замечание**. Доказательство не зависит от того, на каком из оснований находится точка Р. Поэтому разбора двух случаев требовать не нужно.

5. **Решение.** Утверждение задачи означает, что для любого натурального $a>2$ можно подобрать натуральные x, y так, что будет выполняться равенство

$a(a+1) = x(x+1)+3y(y+1) \Leftrightarrow (a-x)(a+x+1) = 3y(y+1)$. Для выполения полученного равенства достаточно, чтобы выполнялась хотя бы одна из двух систем: $\begin{cases} a+x+1=3y \\ a-x=y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{a}{2} \\ x=\dfrac{a}{2}-1 \end{cases}$ или $\begin{cases} a+x+1=3y+3 \\ a-x=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{a+1}{2} \\ x=\dfrac{a-1}{2} \end{cases}$. Первая система показывает, что нужные натуральные числа можно подобрать при любом чётном $a>2$. Вторая система показывает, что нужные натуральные числа можно подобрать при любом нечётном $a>1$. **Критерии проверки.** Верное решение – 7 баллов. Утверждение задачи доказано только для чётных или только для нечётных значений a – 3 балла. В остальных случвях – 0 баллов.

6. **Ответ:** 1. **Решение.** Продлим отрезок *CB* за точку *B* на отрезок *BF*=*DE*, а затем проведём отрезки *CA*, *CE* и *AF*. Легко видеть, что треугольники *CDE* и *ABF* равны. Значит, *CE*=*AF* и совпадают площади пятиугольника и четырёхугольника *AECF*. Но треугольники *AEC* и *AFC* равны по трём сторонам, а площадь треугольника *AFC* равна ½. Значит, площадь четырёхугольника *AECF* равна 1. **Критерии проверки.** Верное решение – 7 баллов. В остальных случаях – 0 баллов.