Всероссийская олимпиада школьников по математике
2016 – 2017 учебный год
Муниципальный этап
Ответы 9 класс

1. Числам x, y и z разрешается принимать только натуральные значения. Докажите, что при этом условии уравнение $x+y+z=100$ имеет нечётное число решений.

Первое решение. Предварительно найдём число решений уравнения $x+y=a$ (где a натуральное) в натуральных числах. Понятно, что x можно брать любым от 1 до $a-1$, а y автоматически определяется из условия. Итак, число решений уравнения $x+y=a$ равно $a-1$. Исходное уравнение можно переписать в виде $x+y=100-z$. Когда z пробегает от 1 до 99 мы последовательно получаем уравнения $x+y=99$, $x+y=98$, …, $x+y=1$. Эти уравнения имеют соответственно $98, 97, \dots, 0$ решений, и все они различны. Сумма этих чисел нечётна, так как в ней нечётное число нечётных чисел, а именно 49.

Второе решение. Решение $x=a$, $y=b$ и $z=c$ для краткости будет записывать как (a,b,c). Каждому решению (a,b,c) поставим в пару решение (b,a,c). Если $a \neq b$, то в такое паре будут две различные тройки. Если такую пару выбросить, то число решений уменьшится на два. Выбросим все такие пары. Чётность всех решений совпадает с чётностью оставшихся решений, то есть решений вида (a,a,c). Но таких решений ровно сорок девять: при a от 1 до 49 решения, очевидно, есть, а при $a \geq 50$ имеем $a+a+c \geq 101$.

Комментарий. Неорганизованный неполный перебор — 0 баллов.

Организованный неполный перебор — не выше 3 баллов.

Доказано, что число решений есть сумма всех натуральных от 1 до 98, но не сделан вывод о чётности — 5 баллов.

2. Число t есть корень квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ с целыми коэффициентами ($a \neq 0$). Докажите, что число $t+2$ также есть корень квадратного уравнения с целыми коэффициентами.

Решение. Число $t+2$ есть корень уравнения $a(x-2)^2+b(x-2)+c=0$. Это уравнение переписывается в виде $ax^2+(b-4a)x+(4a-2b+c)=0$. Отсюда ясно, что все его коэффициенты есть целые числа.

3. Дан ромб $ABCD$ с углом BAD равным $60°$. На стороне AB взяли точку T, а на стороне BC — точку N так, что $AT=BN$. Докажите, что $TN=DT$.

Решение. Треугольник ADB равнобедренный, и угол BAD равен $60°$, значит ADB правильный. Отсюда следует, что $AD=DB$. Диагональ DB ромба есть биссектриса угла ABC, значит $\angle DBN=60°$. И так как $AT=BN$ по условию, то треугольники DAT и DBN равны по двум сторонам и углу между ними. Отсюда следует, что $DT=DN$ и $\angle TDN = \angle TDB + \angle BDN = \angle TDB + \angle ADT = \angle BDA = 60°$. Значит треугольник TDN правильный и $TN=DT$.

Комментарий. Доказано равенство треугольников DAT и DBN — 3 балла.

4. Каждая точка на контуре квадрата покрашена либо в синий, либо в красный цвета. Обязательно ли найдётся прямоугольный треугольник с одноцветными вершинами, лежащими на контуре квадрата?

Ответ. да.

Решение. Допустим, что существует раскраска без таких треугольников и придём к противоречию. Вершины квадрата и середины его сторон обозначим $A_1, \dots, A_8$ против часовой стрелки, начиная с одной из вершин.

Пусть A_1 синего цвета. Если A_3 также синего цвета, то A_5 красная, иначе $A_1A_3A_5$ одноцветный. Аналогично, A_7 красная. Если A_4 синяя, то треугольник $A_1A_3A_4$ синий, если A_4 красная, то $A_4A_5A_7$ красный.

Итак, A_3 красная. Цвет A_2 совпадает со цветом одного из концов отрезка A_1A_3. Без ограничения общности можно считать, что он совпадает со цветом A_1, значит A_2 синяя. Как и в предыдущем рассуждении доказывается, что A_6 и A_7 красные, значит либо $A_1A_2A_8$, либо $A_6A_7A_8$ одноцветные.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

5. На прямоугольном столе разложено несколько прямоугольных листов бумаги так, что их стороны параллельны краям стола. Известно, что любые два листа имеют общую точку. Докажите, что есть точка, принадлежащая всем листам.

Решение. Всюду ниже слово «прямоугольник» будет означать один из листов на столе, если нет других указаний. Введём систему координат так, чтобы оси были параллельны сторонам стола (оси нужны, чтобы ввести понятия верх, низ, право, лево). Среди всех нижних сторон прямоугольников выберем самую верхнюю, лежащую на прямой $y = c$, и среди всех верхних сторон выберем самую нижнюю, лежащую на прямой $y = d$. Так как прямоугольники, содержащие эти стороны, имеют общую точку, то $c \leq d$, ведь иначе прямоугольники отделены прямой $y = \frac{c+d}{2}$.

Среди всех левых сторон прямоугольников выберем самую правую, лежащую на прямой $x = a$, и среди всех правых сторон выберем самую левую, лежащую на прямой $x = b$. Похожим образом доказывается, что $a \leq b$.

Выберем любую точку T, лежащую внутри прямоугольника $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ (этот прямоугольник может выродится в отрезок или точку). Докажем, что T принадлежит всем прямоугольникам. Точка T лежит не выше самой нижней из верхних сторон, значит не выше всех верхних сторон. Она лежит не ниже самой высоких из нижних сторон, значит не ниже всех нижних сторон. Аналогично объясняется, что она лежит не левее всех левых сторон и не правее всех правых.

Если мы возьмём произвольный прямоугольник П, то T лежит не ниже его нижней стороны, не выше его верхней стороны, не левее его левой стороны и не правее его правой стороны. Но это в точности означает, что T принадлежит П.

Замечание. Возможны и другие решения, например, методом математической индукции.

Комментарий. Задача решена для трёх прямоугольников — 2 балла.

Задача решена для конкретного числа прямоугольников (для по крайней мере четырёх) — 3 балла.