

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады
школьников по математике Алтайский край
2016 – 2017 учебный год 10 класс

10.1. Числа a и b таковы, что $|a| \neq |b|$ и $\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b} = 6$.

Найдите значение выражения $\frac{a^3 + b^3}{a^3 - b^3} + \frac{a^3 - b^3}{a^3 + b^3}$.

10.2. Целое число a таково, что числа $5a - 1$ и $a - 10$ делятся на некоторое простое число p . Докажите, что число $a - 3$ тоже делится на p .

10.3. В вершины куба расставляются числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8, так чтобы сумма любых трех чисел принадлежащих любой грани была не меньше, чем 10. Найдите минимально возможную сумму четырех чисел, принадлежащих одной грани.

10.4. Первоначально имеется куча, в которой n камней ($n \geq 2$). Два игрока по очереди делят любую из имеющихся куч (вначале игры она одна) на две или три непустые кучи. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Какой игрок имеет выигрышную стратегию?

10.5. Из точки P , лежащей вне окружности проведены касательные PA и PB и секущая, которая пересекает окружность в точках C и D , считая от точки P . На хорде CD выбрана точка E так, что углы DBE и CAP равны. Докажите, что точки A, P, B, E лежат на одной окружности.

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады
школьников по математике Алтайский край
2016 – 2017 учебный год 10 класс

10.1. Числа a и b таковы, что $|a| \neq |b|$ и $\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b} = 6$.

Найдите значение выражения $\frac{a^3 + b^3}{a^3 - b^3} + \frac{a^3 - b^3}{a^3 + b^3}$.

10.2. Целое число a таково, что числа $5a - 1$ и $a - 10$ делятся на некоторое простое число p . Докажите, что число $a - 3$ тоже делится на p .

10.3. В вершины куба расставляются числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8, так чтобы сумма любых трех чисел принадлежащих любой грани была не меньше, чем 10. Найдите минимально возможную сумму четырех чисел, принадлежащих одной грани.

10.4. Первоначально имеется куча, в которой n камней ($n \geq 2$). Два игрока по очереди делят любую из имеющихся куч (вначале игры она одна) на две или три непустые кучи. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Какой игрок имеет выигрышную стратегию?

10.5. Из точки P , лежащей вне окружности проведены касательные PA и PB и секущая, которая пересекает окружность в точках C и D , считая от точки P . На хорде CD выбрана точка E так, что углы DBE и CAP равны. Докажите, что точки A, P, B, E лежат на одной окружности.