

Всероссийская олимпиада школьников 2016г
муниципальный этап
Математика
10 класс

Общее время выполнения работы – 3 часа 55 мин (235 мин).

Максимальное количество баллов – **35**

Задание 1

Доказать, что

$$[x] + \left[x + \frac{1}{3} \right] + \left[x + \frac{2}{3} \right] = [3x]$$

для любого вещественного x . (Напомним, что $[x]$ – это целая часть вещественного числа, то есть наибольшее целое число, не превосходящее x .)

Количество баллов 7

Задание 2

Доказать, что число

$$\underbrace{111\dots111}_{2017} \underbrace{555\dots555}_{2016} 6$$

является полным квадратом. (Таким образом, дано число, в начале которого стоит 2017 единиц, затем 2016 пятерок и затем одна цифра 6.)

Количество баллов 7

Задание 3

Пусть O – центр окружности, описанной около треугольника ABC , $\angle AOC = 60^\circ$. Найдите угол AMC , где M – центр окружности, вписанной в треугольник ABC .

Количество баллов 7

Задание 4

Вершины правильного 2017-угольника занумеровали (по часовой стрелке) числами от 1 до 2017. Можно ли вершины другого такого же многоугольника занумеровать (этим же числами, но возможно в другом порядке) так, чтобы при любом наложении первого многоугольника на второй у них нашлась бы вершина с одинаковым номером? (При наложении вершины совмещаем с вершинами; переворачивать многоугольники нельзя, а поворачивать можно).

Количество баллов 7

Задание 5

Внутри квадрата с единичной стороной построено несколько окружностей, сумма длин которых равна 100. Докажите, что существует прямая, пересекающая по крайней мере 32 окружности.

Количество баллов 7