

Всероссийская олимпиада школьников по математике
2016 – 2017 учебный год
Муниципальный этап
10 класс

Время выполнения – 240 минут

1. У вас есть мешок сахарного песка, чашечные весы, гири в 1 кг и бумажные пакеты, в которые можно фасовать сахар. Требуется отмерить 50 кг сахара, затратив не более 6 взвешиваний. Как это сделать?

2. Уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет корни. Верно ли, что если $0 < \alpha \leq 1$, то уравнение $\alpha x^2 + px + q = 0$ тоже имеет корни? Корнями считаются только действительные числа.

3. Диагонали AC и BD выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O . Известно, что площадь треугольника AOB равна площади треугольника COD , а площадь треугольника AOD – площади треугольника BOC . Докажите, что $ABCD$ параллелограмм.

4. Докажите, что существуют две бесконечные последовательности целых чисел $\{m_k\}$ и $\{n_k\}$, такие, что все числа в каждой последовательности различны, а обе последовательности $\{\sqrt{n_k + m_k^2}\}$ и $\{\sqrt{n_k - m_k^2}\}$ тоже состоят из целых чисел.

5. На доске написаны все целые числа от 1 до 100. Митя и Дима по очереди стирают по одному числу, пока на доске не останется два числа. Если их сумма делится на 7, выиграл Митя, если не делится – Дима. Первым ходит Митя. Кто выигрывает, если игроки не допускают ошибок?