Всероссийская олимпиада школьников по математике
2016 – 2017 учебный год
Муниципальный этап
11 класс
Время выполнения – 240 минут

1. Известно, что квадратичная функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ при каждом целом x принимает целое значение. Следует ли отсюда, что все числа a, b и c целые?

2. К числам на доске разрешается дописывать число, равное среднему арифметическому двух или нескольких из них, если оно отлично от всех уже написанных чисел. Вначале на доске были написаны числа 0 и 1. Докажите, что после нескольких таких операций можно получить на доске число $\frac{1}{5}$.

3. Дана клетчатая таблица 101×101, клетки которой покрашены в белый цвет. Разрешается выбрать несколько строк и перекрасить все клетки этих строк в чёрный цвет. Затем выбрать ровно столько же столбцов и перекрасить все клетки этих столбцов в противоположный цвет (то есть белые — в чёрный, и чёрные — в белый). Какое наибольшее число чёрных клеток может содержать таблица после этой операции?

4. В правильном треугольнике ABC на сторонах AC, AB и BC выбраны соответственно точки N, T и F так, что $AN = TB$ и $CF = FB$. Докажите, что площадь четырёхугольника $TANF$ равна половине площади треугольника ABC.

5. Ненулевые действительные числа x, y, z и t таковы, что $x + y + z + t = 0$ и $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} = 0$. Докажите, что из чисел x, y, z и t можно выбрать два числа с нулевой суммой.