10 класс

1. Жителя дома называют общительным, если он знаком не менее, чем с 10-ю жителями этого же дома (Если Петров знаком с Ивановым, то Иванов знаком с Петровым). Докажите, что в любом доме есть два знакомых друг с другом общительных жителя или два незнакомых друг с другом необщительных жителя.

Решение

1) У общительного человека есть по крайней мере 10 знакомых.

Если среди них есть общительный, то мы нашли пару общительных знакомых друг с другом.

2) Если среди них нет общительного, то они все необщительные. В этом случае докажем, что среди них есть двое незнакомых друг с другом.

Предположим противное: они все друг с другом знакомы, а так как они знакомы и со взятым вначале рассуждения общительным жителем, то они все общительные. Получили противоречие, следовательно, есть два незнакомых необщительных жителя.

Критерии

Верная идея доказательства, но доказательство не доведено до конца или содержит необоснованные выводы (например, во втором пункте сформулировано, но не доказано существование двух незнакомых необщительных жителя) – 4 балла.

2. Решите в натуральных числах уравнение $n! + 3n + 8 = k^2$ $(n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n)$.

Решение

При любом натуральном $n \geq 3$ $n! + 3n + 8$ при делении на 3 дает остаток 2.

Полный квадрат при делении на 3 не дает остаток 2.

Действительно,

$(3m)^2 = 9m^2$ - делится на 3 нацело,

$(3m \pm 1)^2 = 9m^2 \pm 6m + 1$ - при делении на 3 дает остаток 1.

Таким образом, уравнение $n! + 3n + 8 = k^2$ при $n \geq 3$ решений не имеет.

При $n = 1$ получаем $k^2 = 12$ - нет натуральных решений.

При $n = 2$ получаем $k^2 = 16$ и $k = 4$.

Решение уравнения: $k = 4, n = 2$

Критерии

Только правильный ответ - 1 балл.

Решение содержит правильный ответ и показано, что левая часть уравнения при делении на 3 дает остаток 2 при любом натуральном $n \geq 3$ - 2 балла.

Получен правильный ответ, ход решения верный, но нет доказательства того, что полный квадрат при делении на 3 не дает остаток 2 - 5 баллов.

3. Найдите отношение площади правильного пятиугольника F_1 к площади внутреннего пятиугольника F_2, который образован пересечем всех диагоналей пятиугольника F_1.

Решение

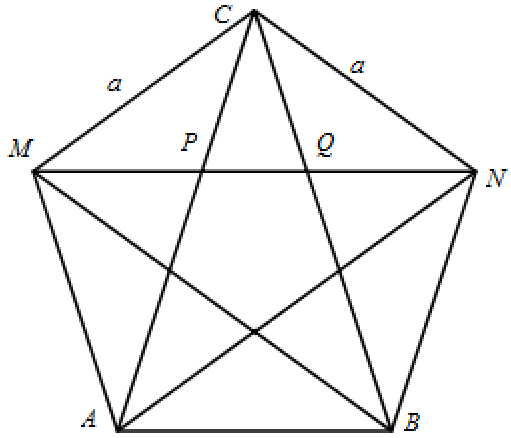

Рис.2

1) Пятиугольник F_2 в силу симметрии F_1 тоже правильный. Пятиугольники подобны, так как они правильные.

2) Отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия. Коэффициент подобия равен отношению длин сторон пятиугольников.

Найдем это отношение.

Для этого найдем PQ (рис. 2).

Углы правильного пятиугольника по $\left(\frac{180°\times 3}{5}\right) = 108°$

Пусть a - сторона большого пятиугольника F_1.

3) В треугольнике MCN по теореме косинусов

$$MN^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \cos 108°$$
$$MN = 2a \cos 36°$$

4) В треугольнике MCP MP=CP (в силу симметрии). Угол P равен 108^0 (вертикальный с углом правильного пятиугольника F_2).

В этом треугольнике по теореме косинусов

$$a^2 = MP^2 + CP^2 - 2MP \times CP \times \cos 108°$$
$$a = 2MP \cos 36°$$
$$MP = \frac{a}{2 \cos 36°}$$

5) PQ=MN-2*MP=$2a \cos 36° - \frac{a}{\cos 36°} = \frac{a\left(2\cos^2 36° - 1\right)}{\cos 36°} = \frac{a \cos 72°}{\cos 36°}$.

6) Таким образом, искомое отношение площадей $\frac{\cos^2 72°}{\cos^2 36°}$.

Критерии

Решение через подобие пятиугольников не содержит обоснование подобия пятиугольников - снимается 1 балл.

Решение не содержит обоснования равенства элементов фигуры (например, MP=CP), а эти равенства используются в решении задачи - снимается 1 балл за каждое отсутствующее обоснование.

Ход решения верный, но содержит ошибки в вычислениях или преобразованиях, которые <u>не изменяют</u> размерность геометрических величин, в результате получен неверный ответ - решение оценивается в 4 балла.

Ход решения верный, но содержит ошибки в вычислениях или преобразованиях, которые <u>изменяют</u> размерность геометрических величин, в результате получен

неверный ответ - решение оценивается в 1 балл (Например, в искомом отношении площадей не сократилась длина стороны a).
За отсутствие преобразований тригонометрических выражений баллы не снимаются.

4. Является ли простым число $1 + 2^{5^{2017}}$?

Решение

5^{2017} делится на 5, поэтому запишем это число как $5n$, где $n \in N$
Получаем выражение $1 + 2^{5n}$.
$1 + 2^{5n} = (2^n + 1)\,(2^{4n} - 2^{3n} + 2^{2n} - 2^n + 1) \quad (*)$
Так как $2^{4n} - 2^{3n} > 1$, $2^{2n} - 2^n > 1$, следовательно, $2^{4n} - 2^{3n} + 2^{2n} - 2^n + 1 > 3$, и $(2^n + 1) > 1$, значит, каждый множитель в разложении (*) больше 1.
Следовательно, данное число простым не является.

Критерии

За отсутствие обоснования, что в разложении на множители каждый множитель больше 1, снимается 2 балла.

5. Можно ли квадрат 50×50 разрезать на полоски 1×4?

Решение

Введем раскраску (рис.3).

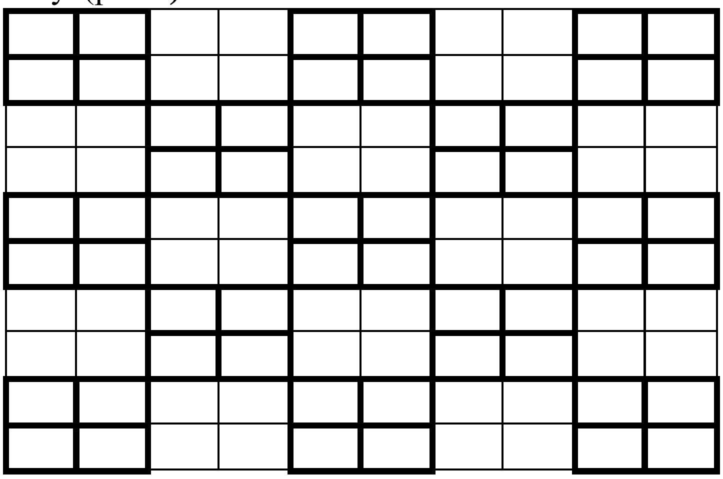

Рис. 3

Каждая полоска 1×4 накрывает ровно 2 белых и 2 черных клетки. Поэтому, если можно разрезать, то белых и черных клеток на доске должно быть поровну.
Но на доске 50×50 черных клеток 313×4 и белых клеток 312×4, то есть непоровну. Поэтому квадрат 50×50 разрезать на полоски 1×4 нельзя.

Критерии

Правильный ответ, полученный из рассмотения конкретных примеров, оценивается в 0 баллов.
Верный ответ с обоснованным решением, в котором допущена арифметическая ошибка (например, неверно найдено число черных и белых клеток) оценивается в 5 баллов.
Верная идея решения (предложена подходящая раскраска) с правильным ответом, но есть необоснованованные выводы (например, для нашей раскраски не обосновано, что на доске черных и белых клеток непоровну) оценивается в 5 баллов.