МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И МОЛОДЕЖНОЙ ПОЛИТИКИ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ

Государственное бюджетное учреждение дополнительного образования Краснодарского края «ЦЕНТР РАЗВИТИЯ ОДАРЕННОСТИ»

350000 г. Краснодар,
ул. Красная, 76
тел. 259-84-01
E-mail: cro.krd@mail.ru

Всероссийская олимпиада школьников по математике

2017-2018 учебный год

Муниципальный этап

10 класс, задания

Председатель предметно-методической комиссии: Гайденко С.В., к.ф.-м.н., доцент

1. В игре «Спортлото-Шиш» розыгрыш главного приза происходит по следующим правилам. Каждый присутствующий в студии пишет независимо от других любое число различных пар различных целых чисел из множества от 1 до 5. Если у некоторых участников выписанные ими пары совпадут, то эти участники делят между собой главный приз. Сколько участников должно быть в студии, чтобы приз заведомо оказался разыгранным?

Решение. Всего различных пар можно составить 5*4/2=10. Учтено, что цифры в паре различные и порядок следования цифр внутри пары значения не имеет. Каждую пару участник может выписать или не выписать. Всего различных наборов можно составить $2^{10} = 1024$. Среди них есть пустой набор (не выписана ни одна пара). Итого 1023 набора. Чтобы у кого-то наборы совпали, необходимо присутствие 1024 человек.

Комментарий. Обязательно нужно исключить пустой набор, а затем добавить одного человека (по принципу Дирихле). При верном ответе без исключения пустого набора оценка 1 балл.

2. В ряд по возрастанию веса стоят 33 гири. Известно, что каждые четыре подряд стоящие гири можно разложить на две чаши весов так, чтобы было равновесие. Третья гиря весит 9 г, девятая – 33 г. Сколько весит 33-я гиря?

Решение. Пусть веса гирь $a_1 < a_2 < \cdots < a_{33}$. Для всех $k = 1,2,\ldots,30$ выполнены равенства $a_k + a_{k+3} = a_{k+1} + a_{k+2}$, равносильные $a_{k+3} - a_{k+2} = a_{k+1} - a_k$. Пусть $a_4 - a_3 = a_2 - a_1 = d$ и $a_5 - a_6 = a_3 - a_2 =$ с, тогда $a_6 - a_5 = a_4 - a_3 = d$, $a_7 - a_6 = a_5 - a_4 =$ с и так далее. Отсюда $a_1 + d + c = a_3 = 9$ и $a_1 + 4d + 4c = a_9 = 33$. Из разности последних равенств получаем $d + c = 8$, а затем $a_1 = 1$. Вычисляем $a_{33} = a_1 + 16(d + c) = 129$.

Комментарий. Незавершенное решение, доведенное до системы двух уравнений, связывающих $a_1, d, c,$ – 4 балла.

3. Покажите, что произведение суммы любых двух положительных чисел и суммы их обратных величин не меньше 4, а произведение суммы любых трех положительных чисел и суммы их обратных величин не меньше 9.

Решение. Первое утверждение следует из неравенства Коши $a^2 + b^2 \geq 2ab$. Второе опирается на первое и на неравенство Коши: $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = \frac{(a+b)^2}{ab} + c\,\frac{a+b}{ab} + \frac{a+b}{c} + 1 \geq 4 + c\,\frac{2\sqrt{ab}}{ab} + \frac{2\sqrt{ab}}{c} + 1 =$

$= 5 + 2\left(\frac{c}{\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab}}{c}\right) \geq 5 + 4$.

Комментарий. Доказательство только первой части – 2балла.

4. Могут ли числа 11, 12 и 13 быть членами (не обязательно соседними) одной геометрической прогрессии?

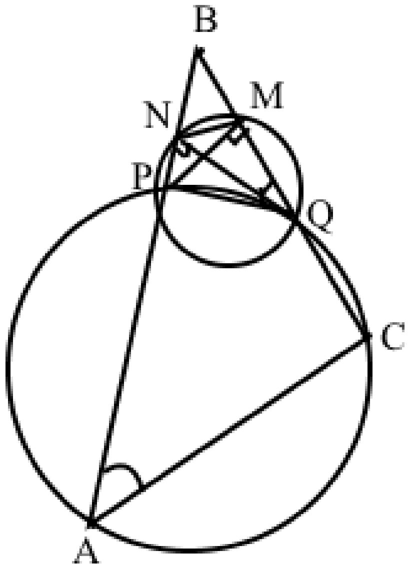
Решение. Допустим, что $b_k = 11$, $b_l = 12$, $b_n = 13$ – члены геометрической прогрессии, то есть $b_1 q^{k-1} = 11$, $b_1 q^{l-1} = 12$, $b_1 q^{n-1} = 13$. Тогда $q^{k-l} = 11/12$, $q^{l-n} = 12/13$. Возведем первое равенство в степень $l-n$, а второе в степень $k-l$. После чего получим $\left(\frac{11}{12}\right)^{l-n} = \left(\frac{12}{13}\right)^{k-l}$, то есть $12^{k-n} = 11^{l-n} 13^{k-l}$, что невозможно в силу различной четности.

Комментарий. Необоснованный ответ – 0 баллов. Рассмотрение только последовательных членов геометрической последовательности – 1 балл.

5. В треугольнике *ABC* точки *P* и *Q* расположены на сторонах *AB* и *BC* соответственно. Треугольник *BPQ* остроугольный и *PM*, *QN* – его высоты. Докажите, что если около четырехугольника *APQC* можно описать окружность, то *MN*||*AC*.

Решение: так как четырехугольник *APQC* вписанный, то ∠*BAC*+ ∠*PQC*=180°. Но ∠*PQM* +∠ *PQC* = 180° (смежные), поэтому ∠*BAC* = ∠*PQM*. Около четырехугольника *PNMQ* можно описать окружность с диаметром *PQ*, так как ∠*PNQ* = ∠*PMQ* = 90°. Поэтому ∠*PQM* + ∠*MNP* = 180°, а значит ∠*BAC* +∠ *MNP* = 180°, то есть сумма односторонних углов *NAC* и *MNA* при прямых

AC, MN и секущей AN равна 180°. Отсюда получаем $AC||MN$.



Комментарий. Доказано равенство углов BAC и PQB (без дальнейших продвижений) – 0 баллов, а если к тому же показано, что $PNMQ$ - вписанный четырехугольник (дальнейших продвижений нет) – 3 балла.