10-й класс

10.1 Известно, что $a+b+c=7$, $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=\frac{7}{10}$. Найдите $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$.

Решение:

$$(a+b+c)\cdot\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)=$$
$$=\frac{c+(a+b)}{a+b}+\frac{a+(b+c)}{b+c}+\frac{b+(c+a)}{c+a}=$$
$$=\frac{c}{a+b}+1+\frac{a}{b+c}+1+\frac{b}{c+a}+1.$$

Значит, искомая сумма равна $7\cdot\frac{7}{10}-3=\frac{19}{10}$.

Ответ: $\frac{19}{10}$**.**

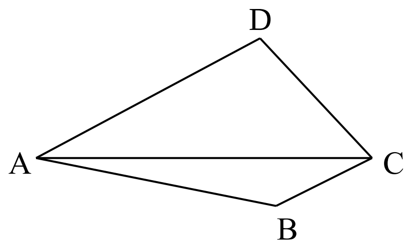
10.2 Существует ли убывающая на промежутке $[0,\infty)$ функция $h(x)$, такая, что функция $f(x)=(x^2-x+1)h(x)$ является возрастающей на промежутке $[0,\infty)$?

Ответ: не существует.

Решение: Если бы такая функция существовала, то было бы $f(1)>f(0)$, т.е. $h(1)>h(0)$, чего быть не может из-за убывания функции $h(x)$.

10.3 В четырехугольнике три тупых угла. Докажите, что большая из двух его диагоналей выходит из вершины острого угла.

Решение: Пусть A – вершина острого угла четырехугольника ABCD. См.рис.



Рассмотрим окружность, построенную на AC как на диаметре. Поскольку углы ABC и ADC тупые, то точки B и D лежат внутри этой окружности. Поэтому расстояние между B и D меньше диаметра AC: $BD<AC$.

10.4 Можно ли найти 20-значное (в десятичной записи) натуральное число, десятичная запись которого начинается с 11 единиц и которое является точным квадратом (другого натурального числа)?

Ответ: нет.

Решение: Рассмотрим любое 20-значное число, начинающее с 11 единиц:

$$N = \underbrace{11...1}_{11}\,\underbrace{0...0}_{9} + m, \quad \text{где} \quad 0 \le m \le 10^9 - 1.$$

(m – это число, образованное последними 9-ю цифрами числа N).

Для дальнейшего удобства рассмотрим число $9N$ – оно окажется точным квадратом, только если N окажется точным квадратом:

$$9N = \underbrace{99...9}_{11} \cdot 10^9 + 9m = (10^{11} - 1) \cdot 10^9 + 9m =$$

$$= 10^{20} - 10^9 + 9m = (10^{10})^2 - 10^9 + 9m.$$

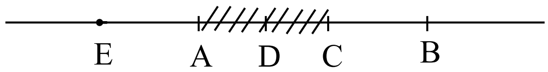
Последнее число не может быть точным квадратом по следующей причине: оно больше, чем $(10^{10} - 1)^2$, и меньше, чем $(10^{10} + 1)^2$, и, поскольку делится на 9, не совпадает с $(10^{10})^2$.

Поясним: $(10^{10} - 1)^2 = (10^{10})^2 - 20 \cdot 10^9 + 1 < (10^{10})^2 - 10^9 \le 9N,$

$$(10^{10} + 1)^2 = (10^{10})^2 + 20 \cdot 10^9 + 1 > (10^{10})^2 - 10^9 + 9(10^9 - 1) \ge 9N.$$

10.5 В отрезке находится несколько меньших отрезков, покрывающих его. У каждого из них отбросили половину: левую или правую. Докажите, что оставшиеся половины покрывают не менее трети длины исходного отрезка.

Решение: Каждую оставшуюся половину (отрезочек) «растянем» в три раза (гомотетия с коэффициентом 3 и с центром в середине отрезочка), см.рис.



AB – один из исходных меньших отрезков, AC – его оставшаяся половина, D – середина AC, EB – «утроение» отрезка AC. Очевидно, отрезок EB содержит отрезок AB. Поэтому «утроения», вместе взятые, заведомо покрывают исходный отрезок, суммарная их длина не меньше длины всего отрезка. Ну, а суммарная длина втрое меньших половинок не менее трети длины исходного отрезка.