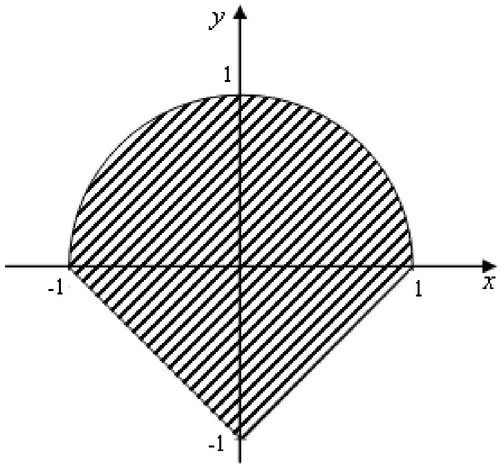
10 класс

10.1. Найдите площадь фигуры, задаваемой на координатной плоскости неравенствами $|x|-1 \le y \le \sqrt{1-x^2}$



Ответ. $\frac{\pi}{2}+1$. **Решение.** Фигура имеет вид, показанный на рисунке: она ограничена снизу графиком $y=|x|-1$, а сверху – полуокружностью $y=\sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y \ge 0 \end{cases}$.

Площадь фигуры складывается из площади полукруга единичного радиуса и половинки квадрата с диагональю, равной 2.

10.2. Дан треугольник ABC, у которого $\frac{BC}{AC}<\frac{1}{2}$. Докажите, что $\angle A<30°$.

Решение. См. задачу 9.2.

10.3. Какое наименьшее количество кругов единичного радиуса требуется, чтобы полностью покрыть ими треугольник со сторонами 2; 3; 4?

Ответ: три круга. **Решение**. См. задачу 9.4.

10.4. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $x^4-ax^2+1=0$ имеет 4 корня, образующих арифметическую прогрессию.

Ответ: $\frac{10}{3}$**. Решение.** Обозначим $t=x^2$. Тогда уравнение $t^2-at+1=0$ должно иметь два положительных корня t_1, t_2 ($t_1<t_2$), а корни исходного уравнения будут иметь вид $-\sqrt{t_2}$, $-\sqrt{t_1}$, $\sqrt{t_1}$, $\sqrt{t_2}$. Условие задачи об арифметической прогрессии дает соотношение $\sqrt{t_2}-\sqrt{t_1}=2\sqrt{t_1}$, т.е. $\sqrt{t_2}=3\sqrt{t_1} \Rightarrow t_2=9t_1$. Из теоремы Виета имеем $t_1t_2=1$ и $t_1+t_2=a$. Отсюда: $9t_1^2=1 \Leftrightarrow t_1=\frac{1}{3}$ (учитывая положительность t_1) и $a=t_1+9t_1=10t_1=\frac{10}{3}$.

10.5. Имеется 10 палочек длины $1;1.9;(1.9)^2;...;(1.9)^9$. Можно ли из этих палочек, используя не обязательно все, сложить **а)** треугольник **б)** равнобедренный треугольник?

Ответ: **а)** можно; **б)** нельзя. **Решение**. **а)** Возьмем в качестве сторон треугольника $a=1+1.9+(1.9)^2+...+(1.9)^7$, $b=(1.9)^8$, $c=(1.9)^9$. Сначала покажем, что $c>a$. Имеем по формуле суммы геометрической прогрессии $a=\frac{(1.9)^8-1}{1.9-1}<(1.9)^9 \Leftrightarrow (1.9)^8(1-0.9\cdot 1.9)<1$ (последнее очевидно, т.к. вторая скобка меньше 0). Таким образом, $c-$наибольшая сторона. Далее проверим неравенство треугольника: $a+b>c \Leftrightarrow \frac{(1.9)^9-1}{1.9-1}>(1.9)^9 \Leftrightarrow (1.9)^9\cdot 0.1>1$ (последнее очевидно, т.к. уже $(1.9)^4>10$).

б) Предположим, от противного, что сложить треугольник можно, и пусть 1.9^{n_2}, …, 1.9^{n_k} – длины палочек, составляющих одну боковую сторону, а 1.9^{m_1}, , …, 1.9^{m_l} – другую. Тогда имеем

$$1.9^{n_1}+\ldots+1.9^{n_k}=1.9^{m_1}+\ldots+1.9^{m_l}.$$

Пусть, для определенности, n_1 – наименьший из показателей, входящих в это равенство. Тогда, сократив равенство на 1.9^{n_1}, получим, что 1.9 является корнем многочлена, у которого старший коэффициент и свободный член равны ± 1, а остальные коэффициенты ± 1 или 0. Но это противоречит тому факту, что рациональными корнями многочлена с целыми коэффициентами могут быть лишь такие числа $\frac{p}{q}$, у которых p – делитель свободного члена, а q – делитель старшего коэффициента.