Муниципальный этап Российской олимпиадыпо математике 2017-18 учебного года
10 класс (*Время решения – 4 часа)*

1.Натуральное число *N* обладает свойством: если к нему прибавить 2^3 или вычесть 3^4, то получатся точные квадраты. Найти все такие *N*.

Решение. Из условия задачи следует: $N+2^3=n^2$, $N-3^4=m^2$, где n,m – натуральные числа. Вычитая из первого равенства второе, получаем: $n^2-m^2=89$ или $(n-m)(n+m)=89$. Так как 89 – простое число, то равенство возможно если и только если $n-m=1$ и $n+m=89$, откуда следует, что $n=45$, а $N=45^2-2^3=2025-8=2017$.

Комментарий. За ответ без обоснования – 1 балл. Не доказано, что других решений нет – не более 3 баллов.

2.Решить уравнение $x^{10}=x^9+x^8+...+x+2$.

Решение. Перепишем уравнение в эквивалентном виде $x^{10}-1=x^9+x^8+...+x+1$. Домножив обе части уравнения на $x-1$, получим $x^{10}-1=(x^{10}-1)(x-1)$, откуда следует, что либо $x^{10}-1=0$, либо $x-1=1$. Значит, все корни уравнения находятся среди чисел 1, –1 и 2. Непосредственная проверка показывает, что корнями уравнения являются $x_1=-1$ и $x_2=2$.

Комментарий. Найдены не все корни или получены лишние – не более 3 баллов.

3.В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) диагонали перпендикулярны, а длина средней линии равна m. На большем основании AD выбрана точка M, такая, что $AM=m$. Найти длину отрезка MC.

Решение. Пусть O – точка пересечения диагоналей трапеции. Через вершину C проведем прямую, параллельную BD, до пересечения с прямой AD в точке K. Треугольники AOD и ACK подобны, следовательно, угол ACK – прямой. По построению, $DBCK$ – параллелограмм, следовательно, $DK=BC$. Значит, $AK=AD+BC=2m$, следовательно, M – середина AK. Таким образом, в прямоугольном треугольнике ACK отрезок CM – медиана к гипотенузе, он равен ее половине, то есть m.

Комментарий. Задача допускает много решений как с помощью геометрических построений, так и алгебраические (тригонометрические). Любое из них, если оно безошибочно, оценивается высшим баллом. Только ответ без обоснования – 0 баллов.

4. Докажите, что если $(a+b+c)c \le 0$, то $b^2 \ge 4ac$.

Решение. Рассмотрим квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$. Очевидно, что $f(0) = c$, а $f(1) = a + b + c$. Из условия задачи следует, что либо одно из этих чисел равно нулю, либо они имеют разные знаки. Это значит, что на отрезке [0,1] есть корень квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. Следовательно, $b^2 - 4ac \ge 0$.

Комментарий. Неравенство может быть доказано и без использования квадратного трехчлена, но тогда придется рассматривать большое количество разных случаев знаков чисел a, b, c и их комбинаций. При проверке таких решений следует убедиться, что все случаи рассмотрены. В противном случае оценка снижается.

5. У Димы есть 9 одинаковых по виду шариков, пронумерованных числами от 1 до 9. Дима знает, что один из шариков чуть тяжелее остальных, но для его определения нужны сверхточные весы. Такие весы есть у вечно занятого соседа-химика, который согласен помочь Диме на таких условиях:

- будет сделано не более двух взвешиваний;
- Дима заранее напишет номера шариков, которые следует положить на каждую чашку весов при каждом взвешивании;

Сможет ли Дима найти тяжелый шарик?

Решение. Сможет. Вот один из способов. Первое взвешивание: на одну чашку весов положить шарики 1,2 и 3, на другую – 4,5 и 6. Второе взвешивание: на одну чашку весов положить шарики 1,4 и 7, на другую – 2, 5 и 8.

Покажем, что полученной информации хватит для определения тяжелого шарика.

Пусть весы оба раза были в равновесии. Тогда тяжелый шарик – №9.

Пусть первый раз весы были в равновесии, второй раз перетянула первая чашка. Из первого взвешивания следует, что все шарики 1–6 легкие, из второго взвешивания следует, что тяжелый шарик – №7.

Пусть при первом взвешивании перетянула первая чашка, при втором – вторая. Из первого взвешивания следует, что тяжелый шарик имеет номер 1, 2 или 3, остальные шарики – легкие. Из второго взвешивания следует, что тяжелый шарик – №2.

Все остальные случаи рассматриваются аналогично.

Комментарий. Во время проведения олимпиады следует убедиться, что все участники поняли задачу правильно: *Дима не может вмешиваться в процесс* и корректировать задание на второе взвешивание после проведения первого.

Задача допускает много решений, следует только проверять, охватывает ли предлагаемый алгоритм все случаи. Если *хотя бы в одном случае* определить искомый шарик невозможно, то решения нет, оценка – 0 баллов.