

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

2017-2108 УЧЕБНЫЙ ГОД

ВТОРОЙ ЭТАП

10 КЛАСС

РЕШЕНИЯ

1. Искомое число равно $(9+1) + (99+1) + \dots + (\underbrace{99\dots9}_{2016 \text{ раз}} + 1) + 1 =$
 $= 10 + 10^2 + \dots + 10^{2016} + 1 = \frac{11\dots1}{2017 \text{ раз}}.$

Ответ: $\frac{11\dots1}{2017 \text{ раз}}.$

2. Скорость пешехода 5 км/ч. Пусть собственная скорость трамвая x км/ч, тогда скорость обгоняющего трамвая (относительно пешехода) $(x-5)$ км/ч, а скорость встречного трамвая $-(x+5)$ км/ч. Пусть пешеход потратил за год на прохождение участка n часов. За это время трамваи прошли соответственно $n(x-5)$ и $n(x+5)$ км. Расстояние между соседними трамваями, движущимися в одном направлении, одинаково. Значит, $\frac{n(x-5)}{225} = \frac{n(x+5)}{600} \rightarrow x = 11.$

Ответ: 11 км/ч.

3. Данная система равносильна системе $\begin{cases} (x+y)^3 = 32, \\ x \cdot y(x+y) = 4. \end{cases}$ Откуда $\frac{(x+y)^2}{xy} = 8.$

Значит, $\frac{(x_1+x_2)^2}{x_1 \cdot x_2} = 8.$ Но $x_1 + x_2 = \beta$, $x_1 \cdot x_2 = \gamma.$

Ответ: 8.

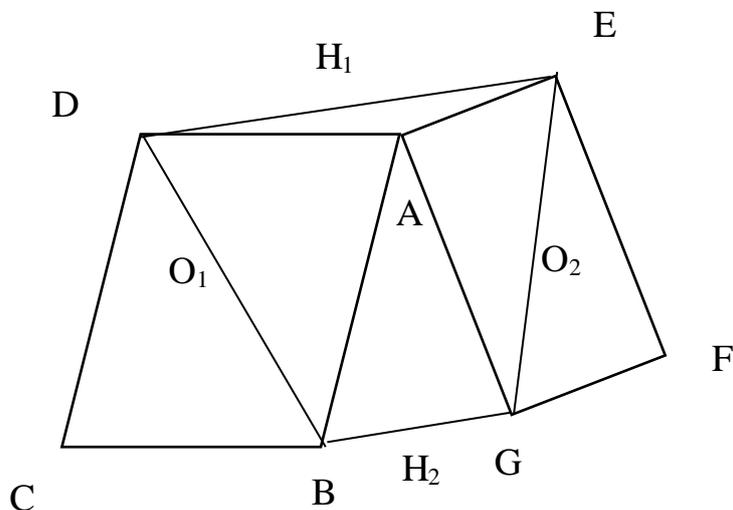
4. Рассмотрим 2017 натуральных чисел:

2018, 20182018, 201820182018, ..., $\frac{20182018\dots2018}{2017 \text{ раз}}.$

Если не одно из этих чисел не делится на 2017, то существует хотя бы 2 из этих чисел, которые в остатке при делении на 2017 дают одно и то же число. Тогда разность этих двух чисел делится на 2017 и имеет вид:

$2018\dots20180000\dots0000 = \underbrace{20182018\dots2018}_{n \text{ раз}} \cdot 10^{4k}$. Так как 10^{4k} не делится на 2017, то $\underbrace{20182018\dots2018}_{n \text{ раз}}$ делится на 2017.

5.



Пусть O_1 и O_2 – центры параллелограммов $ABCD$ и $AEFG$ соответственно.

H_1 и H_2 – середины отрезков DE и BG соответственно.

$O_1 H_1 \parallel BE$ и $O_1 H_1 = 1/2 BE$ (средняя линия ΔBDE).

Аналогично $O_2 H_2 \parallel BE$ и $O_2 H_2 = 1/2 BE$.

Значит, $O_1 H_1 \parallel O_2 H_2$ и $O_1 H_1 = O_2 H_2$. Следовательно, $O_1 H_1 O_2 H_2$ – параллелограмм.