Общие положения

1) Максимальная оценка за каждую задачу — 7 баллов.

2) 7 баллов ставится за безукоризненное решение задач; 6 баллов означает, что в решении допущена мелкая погрешность, например, не разобран частный случай, не влияющий на решение. 4 или 5 баллов означают, что все идеи, необходимые для решения найдены, задачу в целом надо считать решённой, однако приведённое решение имеет существенные недостатки, например, в доказательстве ключевого факта имеются пробелы, устранимые не совсем очевидным образом. 2 — 3 балла ставится, если в решении задачи имеется серьёзное продвижение, однако для решения необходимы дополнительные идеи, не указанные в решении. 1 балл означает, что в решении имеется только очень мелкое продвижение, как то: замечен, но не доказан ключевой факт, разобран нетривиальный частный случай или приведён (но не обоснован) верный ответ, который не вполне тривиален. Если приведённые в решении факты, идеи, выкладки к решению явным образом не ведут, то задача оценивается в 0 баллов, также как и в случае, когда решение задачи отсутствует.

3) В случае наличия в одной работе нескольких решений оценивается ровно одно решение, то, которое приносит больше баллов. За другие решения баллы не снимаются и не начисляются.

4) Оценка за задачу не может быть снижена за неаккуратный почерк, ошибки в русском языке, или явные описки в выкладках. Также недопустимо снижение баллов за не чёткий чертёж в геометрической задаче или даже за отсутствие такового. Нельзя требовать с участника олимпиады, чтобы он переписывал условие задачи, в том числе не обязательна краткая запись условия геометрических задач.

5) Школьник имеет право сам выбрать способ решения той или иной задачи; не допускается снижать оценку за то, что выбранный школьником способ решения не самый лучший или отличается от предложенных нами способов.

6) Факты и теоремы школьной программы (в том числе и те, которые приведены только в задачах школьных учебников) следует принимать без доказательств. Школьник имеет право без доказательства использовать любые такие факты, даже если они проходятся в более старших классах. Допускается (также без доказательств) использование математических фактов, изучающихся на факультативах. В частности, без ограничения можно применять формулы аналитической геометрии, математического анализа, принцип математической индукции, теоремы теории графов и т.п.

7) Критерии оценки, приведённые в прилагаемых решениях (таблица в конце решения каждой задачи) являются обязательными и не могут быть изменены. Однако это не означает, что выставляемые за задачу баллы обязательно должны совпасть с приведёнными в таблице: в случае, когда жюри вырабатывает дополнительные критерии (см. следующий пункт) жюри может выставить балл, которого в таблице нет (например, в таблице предусмотрены только 0 и 7 баллов, а

жюри выставляет 5 баллов). Таблицы критериев составлены таким образом, что перечисляют отдельные случаи; накопление баллов за разные пункты не предусмотрено.

8) В случае, если решение школьника принципиально отличается от решений, предложенных программным комитетом, и не может быть подведено под предлагаемые критерии, проверяющие вырабатывают критерии самостоятельно в соответствии с пунктом 2.

9) В случае возникновения спорных ситуаций при проверке работ олимпиады жюри вправе обратиться за разъяснениями и советом к составителям пакета заданий, т.е. к д.ф-м.н. Валерию Трифоновичу Шевалдину (адрес эл. почты **valerii.shevaldin@imm.uran.ru**) и к.ф-м.н. наук Сергею Эрнестовичу Нохрину (адрес эл.почты **varyag2@mail.ru**, тел. +**79220350324**). Мы ответим на все Ваши вопросы.

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2017 – 2018 учебном году 10 класс

Время выполнения заданий — 4 часа

10.1. *Известно, что квадратные относительно x уравнения $2017x^2+px+q=0$ и $px^2+qx+2017=0$ (здесь p и q — заданные действительные числа) имеют один общий корень. Приведите все возможные значения этого общего корня и докажите, что других нет.*

Решение: Пусть x_0 — общий корень этих уравнений, то есть выполнены равенства $2017x_0^2+px_0+q=0$ и $px_0^2+qx_0+2017=0$. Умножим обе части первого уравнения на число x_0 и вычтем второе уравнение. Получим уравнение-следствие: $2017x_0^3-2017=0$, откуда $x_0=1$. При подстановке этого корня в любое из исходных уравнений получим равенство $p+q+2017=0$. Это означает, что при $p+q=-2017$ оба уравнения действительно имеют общий корень, равный 1, а если эта сумма равна другому числу, то общих корней просто нет.

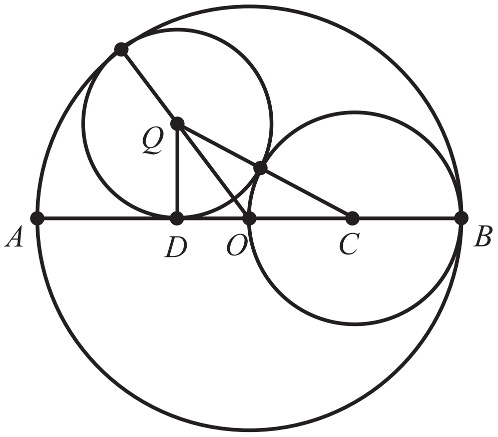
Ответ: 1.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный и полностью обоснованный ответ	7 баллов
Верно выписаны корни обоих квадратных уравнений и верно исследован хотя бы один случай совпадения корней	4 балла
Замечено, что если 1 — корень, то этот корень — общий, но не доказано, что других общих корней не может быть	1 балл
Верный ответ без обоснования и/или выкладки, из которых не видно хода решения	0 баллов

10.2. *На плоскости построили полукруг с диаметром $AB=36$ см; внутри него построили полукруг с диаметром $OB=18$ см (O — центр большего полукруга). Затем построили круг, касающийся обоих полукругов и отрезка AO. Найдите радиус этого круга. Ответ обоснуйте.*

Решение: Обозначим искомый радиус через x. Пусть точки C и Q — соответственно центры меньшего полукруга и вписанного круга, D — точка касания вписанного круга с диаметром AB. В силу касания круга и большего полукруга луч OQ проходит через точку касания, значит $OQ=18-x$. В силу касания круга и меньшего полукруга отрезок CQ проходит через точку касания, значит $CQ=9+x$. В силу касания круга и отрезка AB отрезок QD равен x и является высотой треугольника QOC. В треугольнике QOC через x выражены все три



К решению задачи 10.2

стороны и высота. Найдём двумя способами его площадь. Полупериметр треугольника равен $\dfrac{9+(18-x)+(9+x)}{2} = 18$ и по формуле Герона его площадь равна $\sqrt{18\cdot(18-9)\cdot(18-(18-x))\cdot(18-(9+x))} = \sqrt{18\cdot 9\cdot x\cdot(9-x)}$. Эта же площадь равна полупроизведению высоты на сторону, к которой высота проведена, то есть равна $\dfrac{9\cdot x}{2}$. Из уравнения $\sqrt{18\cdot 9\cdot x\cdot(9-x)} = \dfrac{9\cdot x}{2}$ находим $x = 8$.

Ответ: 8 см.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный и полностью обоснованный ответ	7 баллов
При верном ходе решения получен неверный ответ из-за ошибок в выкладках (алгебраических или арифметических)	6 баллов
Верно выписаны (через неизвестное) элементы треугольника QOC, полностью его определяющие, при этом решение не доведено до ответа	5 баллов
Треугольник QOC рассматривается, но найдены (выражены через неизвестное) не все элементы, его определяющие	3 балла
Верное применения метода координат, которое не доведено до ответа (в зависимости от степени продвижения)	1–3 балла
Верный ответ без обоснования и/или любые выкладки, из которых не видно хода решения	0 баллов

10.3. *Вася выбрал некоторое действительное число x и выписал бесконечную последовательность: $a_1 = 1+x^2+x^3$, $a_2 = 1+x^3+x^4$, $a_3 = 1+x^4+x^5$, $\ldots$, $a_n = 1+x^{n+1}+x^{n+2}$, $\ldots$. Оказалось, что $a_2^2 = a_1\cdot a_3$ Докажите, что тогда при всех натуральных $n \geqslant 3$ имеет место равенство $a_n^2 = a_{n-1}\cdot a_{n+1}$.*

Решение: Проведём равносильные преобразования.

$$a_2^2 = a_1\cdot a_3,$$
$$(1+x^3+x^4)^2 = (1+x^2+x^3)(1+x^4+x^5),$$

$$1+x^6+x^8+2x^3+2x^4+2x^7=1+x^2+x^3+x^4+x^6+x^7+x^5+x^7+x^8,$$
$$x^3+x^4=x^2+x^5,$$
$$x^3(1+x)=x^2(1+x^3),$$
$$x^3(1+x)-x^2(1+x)(1-x+x^2)=0,$$
$$x^2(1+x)(x-1+x-x^2)=0,$$
$$-x^2(1+x)(x^2-2x+1)=0,$$
$$x^2(1+x)(x-1)^2=0,$$
$$x=0 \quad \text{или} \quad x=-1 \quad \text{или} \quad x=1.$$

Таким образом, было выбрано одно их трёх чисел: 0, -1 или 1. В первых двух случаях все члены a_i равны 1, в третьем — все они равны 3. И во всех случаях равенство $a_n^2=a_{n-1}\cdot a_{n+1}$ выполнено при $n\geqslant 3$.

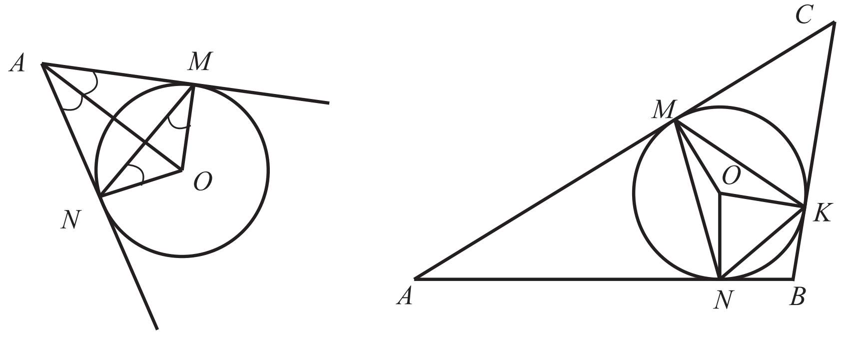
Примечание: Выкладки, аналогичные приведённым в решении, показывают, что при любом действительном n равенство $a_n^2=a_{n-1}\cdot a_{n+1}$ равносильно совокупности условий $x=0$, $x=\pm 1$.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верное доказательство	7 баллов
При алгебраических преобразованиях утеряны один или два из трёх возможных случаев $x=0$, $x=1$, $x=-1$	5 баллов
Приведена одна или несколько возможных последовательностей, но не доказано отсутствие других	1 балл
Выкладки, из которых не видно хода решения	0 баллов

10.4. *В треугольник вписана окружность. Докажите, что треугольник, образованный точками касания, — остроугольный.*

Решение: Докажем лемму. Пусть в угол с вершиной A вписана окружность с центром в точке O и пусть она касается сторон угла в точках M и N. Тогда $\angle MNO=\angle NMO=\dfrac{\angle NAM}{2}$ — см. рисунок.



К решению задачи 10.4

Доказательство леммы. Около четырёхугольника $AMON$ можно описать окружность (с диаметром AO), так как его противоположные углы M и N — прямые. Тогда $\angle MNO = \angle MAO$: углы вписаны и опираются на одну дугу. Так как центр вписанного в угол круга лежит на биссектрисе угла, $\angle MAO = \dfrac{\angle MAN}{2}$. Лемма доказана.

Докажем утверждение задачи. Пусть окружность с центром в точке O касается сторон AB, BC и AC в точках M, K и N соответственно — см. рисунок. Согласно лемме $\angle OMN = \dfrac{\angle A}{2}$ и $\angle OMK = \dfrac{\angle C}{2}$. Тогда

$$\angle NMK = \angle NMO + \angle KMO = \frac{\angle A + \angle C}{2} < \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ.$$

Угол MNK, следовательно, острый. Доказательство для двух других углов треугольника аналогично приведённому.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верное доказательство	7 баллов
Заявлено, но не доказано утверждение леммы (или иное неочевидное верное утверждение, используемое в доказательстве); в остальном доказательство верное	5 баллов
Есть идея использования вписанности четырёхугольника $AMON$, но решение не завершено	4 балла
Имеется не доведённая до конца попытка выразить углы ΔKMN через углы исходного треугольника	2 балла
Верно разобранные частные случаи (в любом количестве)	1 балл
Любые выкладки или построения, из которых не видно хода решения	0 баллов

10.5. *Назовем натуральное число* полупростым, *если оно больше 25 и является суммой двух различных простых чисел. Какое наибольшее количество последовательных натуральных чисел может оказаться полупростыми? Ответ обоснуйте.*

Решение: Существует много наборов из пяти последовательных полупростых чисел, например 30 ($= 13 + 17$), 31 ($= 2 + 29$), 32 ($= 3 + 29$), 33 ($= 2 + 31$), 34 ($= 5 + 29$) или 102 ($= 5 + 97$), 103 ($= 2 + 101$), 104 ($= 31 + 73$), 105 ($= 2 + 103$), 106 ($= 47 + 59$). Покажем, что шести последовательных полупростых чисел не найдётся.

В самом деле, среди любых шести последовательных чисел ровно три нечётных и эти нечётные возрастают с шагом 2. Если нечётное число представлено в виде суммы двух натуральных, то среди слагаемых одно чётно, а второе нечётно. Если оба слагаемых простые, то чётное обязано равняться 2. Значит, эти нечётные полупростые числа имеют вид $2 + p_1$, $2 + p_2$ и $2 + p_3$. При этом числа p_1, p_2,

p_3 — последовательные нечётные. Но среди трёх любых последовательных нечётных чисел одно делится на 3. Так как оно простое, то оно обязано равняться 3. Тогда одно из чисел равно 5, и полупростым не является, так как оно меньше 25. Противоречие.

Ответ: 5 чисел.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верный и полностью обоснованный ответ	7 баллов
При верном доказательстве, что чисел не более 5 отсутствует пример 5 последовательных полупростых чисел	4 балла
Приведён только пример (или примеры) 5 последовательных полупростых чисел	2 балла
Верный ответ без обоснования и/или примеры последовательных полупростых чисел в количестве, меньшем 5, и/или более грубая оценка их количества.	0 баллов

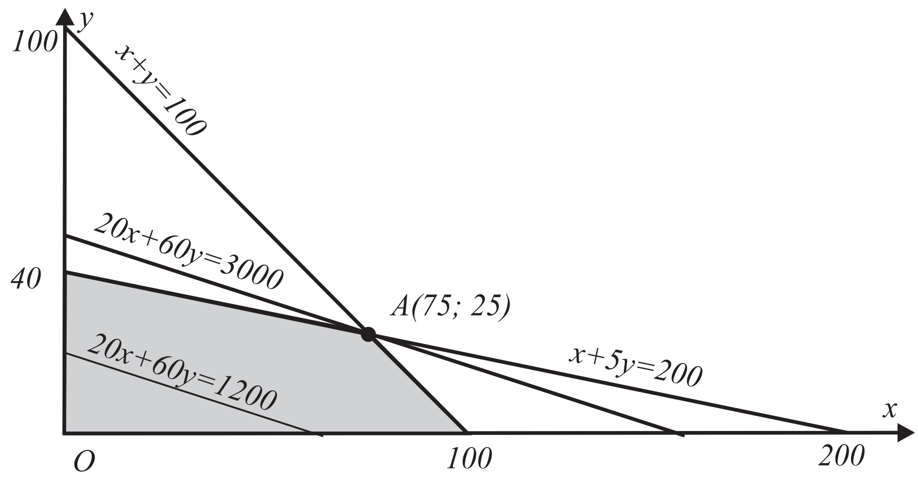
10.6. *Али-баба пришел в пещеру, где есть золото и алмазы. У Али-бабы с собой был один большой мешок. Известно, что полный мешок с золотом весит* 200 *кг, а если весь мешок наполнить одними алмазами, то он будет весить* 40 *кг (пустой мешок ничего не весит). Килограмм золота стоит* 20 *динаров, а килограмм алмазов —* 60 *динаров. Какую наибольшую сумму денег может выручить Али-баба, если он может унести с собой в этом мешке не более* 100 *кг? Ответ обоснуйте.*

Решение:

Способ 1. Пусть Али-баба положил такой набор золота и алмазов, который даёт ему максимально возможную выручку — назовём такой мешок оптимальным. Тогда либо мешок набит под завязку, либо весит ровно 100 кг: в противном случае в него можно было бы доложить ещё алмазов и выручка вырастет. Рассмотрим первую ситуацию, когда мешок полон. Ясно, что в нём есть алмазы, поскольку полный вес мешка с золотом больше 100 кг. Заметим, что мешок, наполненный одним золотом стоит $200 \cdot 20 = 40000$ динаров, а одними алмазами — $40 \cdot 60 = 24000$ динаров, поэтому равный объём золота даёт больше прибыли, чем такой же объём алмазов. Если вес оптимального мешка меньше 100 кг, мы можем заменить немного алмазов на равное по объёму количество золота (так чтобы вес мешка возрос, но не превзошёл 100 кг). При этом стоимость мешка возрастёт — противоречие с оптимальностью мешка. Итак, вес оптимального мешка ровно 100 кг. Предположим, что оптимальный мешок не полон. Тогда в нём есть золото, и Али-баба может часть его заменить на алмазы того же веса (при этом следя, чтобы объём мешка не стал слишком большим). Так как килограмм алмазов дороже килограмма золота, прибыль Али-бабы возрастёт — вновь противоречие с оптимальностью.

Значит, мешок полон. Пусть в мешке x кг алмазов. Тогда в нём золота $100-x$ кг. Алмазы занимают $x/40$ часть мешка, золото — $(100-x)/200$. Так как мешок полон, имеем равенство $\dfrac{x}{40}+\dfrac{100-x}{200}=1$, откуда $x=25$. Стоимость оптимального мешка теперь находится тривиально. Она оказывается равна 3000 динаров.

Способ 2. Пусть Али-баба положил в мешок x кг золота и y кг алмазов. Тогда он выручит $20x+60y$ динаров. У Али-бабы два ограничения: во-первых, он не может нести более 100 кг, поэтому $x+y\leqslant 100$. Во-вторых, такое количество золота и алмазов должно уместиться в мешке. Так как один килограмм золота занимает 1/200 мешка, а один килограмм алмазов — 1/40, возникает ещё одно неравенство $\dfrac{x}{200}+\dfrac{y}{40}\leqslant 1$, то есть $x+5y\leqslant 200$. Кроме того, ясно, что переменные x и y неотрицательны. Получили задачу: найти наибольшее значение выражения $20x+60y$ на множестве всех пар чисел неотрицательных чисел $(x;\ y)$, удовлетворяющих системе неравенств $\left\{\begin{array}{rcl} x+y & \leqslant & 100 \\ x+5y & \leqslant & 200 \end{array}\right.$. Это — классическая задача математики, имеющая много способов решения. Мы решим её графически. Множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют нашим условиям, — закрашенный четырёхугольник, изображённый на рисунке.



К решению задачи 10.6

Уравнение $20x+60y=C$ при разных C задаёт семейство параллельных прямых; чем выше прямая на плоскости — тем больше значение C. (На рисунке изображена одна такая прямая при $C=1200$.) Самая высокая прямая, ей параллельная, проходит через вершину A изображённого четырёхугольника. Координаты вершины находятся из системы $\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 100 \\ x+5y & = & 200 \end{array}\right.$; они равны $x=75$, $y=25$. Таким образом, наибольшее возможное значение C равно 3000.

Ответ: 3000 динаров.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный и полностью обоснованный ответ	7 баллов
При верном ходе решения получен неверный ответ из-за арифметических ошибок	6 баллов
Доказаны оба факта (см. критерии на 2 балла)	4 балла
Условие задачи верно сведено к анализу системы или имеется верная графическая интерпретация задачи, но решение не доведено до конца	3 балла
Доказан один из двух фактов: 1) оптимальный мешок весит ровно 100 кг; 2) оптимальный мешок полон;	2 балла
Получен верный ответ в предположении, что оптимальный мешок полон и весит 100 кг, но ни один пункт предположения не доказан	1 балл
Верный ответ без обоснования	0 баллов