Решения задач муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников по математике 2017 год

10 класс

> *1. Известно, что* $\sin(\alpha+\beta)=0{,}2$ *и* $\cos(\alpha-\beta)=0{,}3$. *Вычислите* $\sin(\alpha+45°)\cdot\sin(\beta+45°)$.

Ответ. 0,25.

Решение. По формуле для синуса суммы углов имеем

$$\sin(\varphi+45°)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\varphi+\cos\varphi),$$

и значит, $P=\sin(\alpha+45°)\cdot\sin(\beta+45°)=\frac{1}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin\beta+\cos\beta)$. Раскрывая скобки и вновь используя формулу для синуса и косинуса суммы углов, получим

$$P=\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))=0{,}25.$$

Критерии. Доказано равенство $P=\frac{1}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin\beta+\cos\beta)$ — 1 балл.

> *2. При каких q один из корней уравнения $x^2-12x+q=0$ является квадратом другого?*

Ответ. –64 или 27.

Решение. Пусть корни уравнения есть a и a^2. По теореме Виета $a+a^2=12$, $a\cdot a^2=q$. Значит, $a=-4$ или $a=3$, $q=a^3$.

Критерии. Только ответ – 1 балл. В случае полного обоснования – оценка 7 баллов.

> *3. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_{100}$ — некоторые числа, принадлежащие отрезку $[0; 1]$. Верно ли, что на этом отрезке найдётся такое число x, что $|x-x_1|+|x-x_2|+\dots+|x-x_{100}|=50$?*

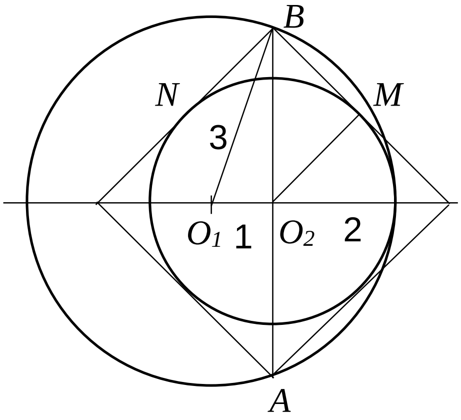
Ответ. Верно.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=|x-x_1|+|x-x_2|+\dots+|x-x_{100}|-50$, непрерывную на отрезке [0;1]. Имеем $f(0)=x_1+x_2+\dots+x_{100}-50$, $f(1)=(1-x_1)+(1-x_2)+\dots+(1-x_{100})-50$. Значит, $f(0)+f(1)=\Sigma x_i+\Sigma(1-x_i)-100=0$.

Если числа $f(0)$ и $f(1)$ равны 0, то уравнение имеет, по крайней мере, два корня: 0 и 1. Если же одно из этих чисел отрицательное, то другое — положительное. Поскольку f — непрерывная функция, существует такое $x\in[0;1]$, при котором $f(x)=0$.

Критерии. В случае полного обоснования – оценка 7 баллов.

4. Две окружности, радиусы которых относятся как 2 : 3, касаются внутренним образом. Через центр меньшей окружности проведена прямая, перпендикулярная линии центров, из точек пересечения этой прямой с большей окружностью проведены касательные к меньшей окружности. Найти углы между этими касательными.



Ответ. Все углы прямые.

Решение. По теореме Пифагора $O_2B = \sqrt{9-1} = 2\sqrt{2}$. Из прямоугольного треугольника O_2BM находим $BM = 2$. Значит, треугольник O_2BM равнобедренный, с углом 45°. Аналогично и угол O_2BN составляет 45°.

Итак, касательные, проведенные из одной точки к меньшей окружности перпендикулярны между собой.

Можно проводить расчет и другими способами.

Критерии. В случае полного обоснования – оценка 7 баллов.

5. а) Какое наибольшее количество неперекрывающихся полосок 1 × 3 можно уместить на салфетке, изображенной на рисунке? б) Какое наименьшее количество полосок 1 × 3 потребуется, чтобы покрыть салфетку целиком, если полоски могут перекрываться?

Ответ.

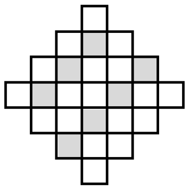


Рис. 1, а

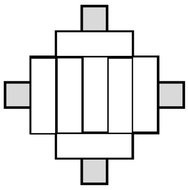


Рис. 1, б

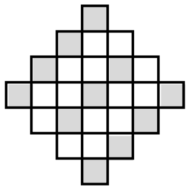


Рис. 2, а

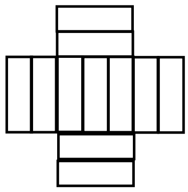


Рис. 2, б

Решение. а) Раскрасим клетки на салфетке, как показано на рисунке 1,а («диагональная» рас-краска). Каждая полоска 1×3 не может содержать более одной чёрной клетки. Поскольку чёрных кле-ток всего 7, мы не можем уместить на салфетке более 7 полосок (оценка). На рисунке 1,б приведён пример 7 полосок, которые можно разместить на салфетке.

б) Раскрасим клетки на салфетке, как показано на рисунке 2,а. Каждая полоска 1×3 не может со-держать более одной чёрной клетки. Поскольку чёрных клеток всего 11, для покрытия салфетки по-надобится не менее 11 полосок (оценка). На рисун-ке 2,б приведен пример 11 полосок, которые целиком покрывают салфетку.

Критерии. Ответ без обоснования – по 1 баллу за каждый пункт. Доказано, что число наибольшее или наименьшее – по 3 балла за каждый пункт. Полное решение – 7 баллов.