Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике

2017/18 учебный год

10 класс

Ответы и решения задач

1. УСЛОВИЕ

Числа a и b удовлетворяют равенству $a^2b^2/(a^4 – 2b^4) = 1$. Найдите все возможные значения выражения $(a^2 – b^2)/(a^2 + b^2)$.

Решение. Из данного равенства следует, что $a^4 – b^2a^2 – 2b^4 = 0$, т.е. $(a^2 + b^2)(a^2 – 2b^2) = 0$, откуда $a^2 = – b^2$ или $a^2 = 2b^2$. Первый случай невозможен: условию $a^2 = – b^2$ удовлетворяют только числа $a = b = 0$, при которых данное равенство не имеет смысла. Ненулевые числа a и b, такие, что $a^2 = 2b^2$, равенству удовлетворяют, и при всех таких a и b значение выражения

$$(a^2 – b^2)/(a^2 + b^2) = 1/3.$$

Ответ: 1/3.

2. УСЛОВИЕ

Первая и вторая цифры двузначного числа N являются соответственно первым и вторым членами некоторой геометрической прогрессии, а само число N втрое больше третьего члена этой прогрессии. Найдите все такие числа N.

Решение. По условию $10b + bq = 3bq^2$, где $b \neq 0$ – первый член, q – знаменатель прогрессии. Отсюда $3q^2 – q – 10 = 0$, $q_1 = 2$, $q_2 = - 5/3$, т.е. $q = 2$. Из неравенства $bq \leq 9$ следует, что $b = 1, 2, 3$ или 4.

Ответ: 12, 24, 36, 48.

3. УСЛОВИЕ

Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 3$ и $BC = 4$. Построим треугольник $A_1B_1C_1$, последовательно переместив точку A на некоторое расстояние параллельно отрезку BC (точка A_1), затем точку B – параллельно отрезку A_1C (точка B_1) и, наконец, точку C – параллельно отрезку A_1B_1 (точка C_1). Чему равна длина отрезка B_1C_1, если оказалось, что угол $A_1B_1C_1$ прямой и $A_1B_1 = 1$?

Решение. При перемещении вершины треугольника параллельно его основанию площадь треугольника не меняется, поэтому последовательно получаем равенство площадей треугольников ABC, A_1BC, A_1B_1C и, наконец, $A_1B_1C_1$. Таким образом, $B_1C_1 = 2S/ A_1B_1 = 12$.

Ответ: 12.

4. УСЛОВИЕ

Пусть a, b, c и d – такие действительные числа, при которых при всех действительных значениях x имеет место равенство $|2x + 4| + |ax + b| = |cx + d|$. Докажите, что $d = 2c$.

Решение. Способ первый. Рассмотрим графики функций, стоящих в левой и в правой части. При $c \neq 0$ график функции $f(x) = |cx + d| = |c| \cdot \left|x + \dfrac{d}{c}\right|$ — стандартный график модуля (т.е. ломаная из двух звеньев), сдвинутая по оси Ox в точку с абсциссой $-\dfrac{d}{c}$ и растянутый по оси ординат в $|c|$ раз (если $|c| < 1$, реально имеет место сжатие). Если же $c = 0$, то этот график — горизонтальная прямая. Рассмотрим график функции $g(x) = |2x + 4| + |ax + b|$. При $a = 0$ это есть график модуля вдвое растянутый по вертикали, сдвинутый влево на 2 единицы и вверх на $|b|$ единиц. Для совпадения графиков в этом случае необходимо условие $b = 0$, $c = 2$, $d = 4$, т.е. условие $d = 2c$ выполнено. Пусть $a \neq 0$. Тогда

$$g(x) = \begin{cases} (a+2)x + (b+4), & \text{если} \quad x \geqslant max\{-2, -b/a\} \\ -(a+2)x - (b+4), & \text{если} \quad x \leqslant min\{-2, -b/a\} \\ (a-2)x + (b-4), & \text{если} \quad -2 > x > -b/a \\ (2-a)x + (4-b), & \text{если} \quad -2 < x < -b/a \end{cases}.$$

(из двух последних строчек может выполняться только одна). В этом случае график $g(x)$ — кусочно-линейная функция, состоящая из трёх (при $-2 = -b/a$) или из двух (при $-2 \neq -b/a$) звеньев. Эти звенья не параллельны, так как коэффициенты при x попарно различны. Значит, для совпадения графиков $f(x)$ и $g(x)$ (при $a \neq 0$) необходимо выполнение условия $-2 = -\dfrac{b}{a}$, тогда $g(x) = (2 + |a|) \cdot |x + 2|$, и в этом случае должно также выполняться, что $-2 = -\dfrac{d}{c}$ и $|c| = |a| + 2$. Первое из этих уравнений и есть то, что требуется доказать в задаче.

Способ второй. Пусть сначала $c \neq 0$. Тогда подставим в уравнение $x = -\dfrac{d}{c}$ и получим, что сумма двух модулей (т.е. неотрицательных чисел) равна нулю. Значит, каждый из модулей равен нулю, в частности,

$|2x+4| = 0$, откуда $x = -2$. Имеем $-\dfrac{d}{c} = -2$, что и требуется доказать.

Теперь допустим, что $c = 0$. Тогда сумма двух неотрицательных функций $|2x+4|$ и $|ax+b|$ есть константа (равная $|d|$). Но это возможно только в том случае, когда каждая из функций ограничена (тем самым числом $|d|$). Но функция $|2x+4|$ ограниченной не является. Значит, в этом случае решений нет.

есть в работе	**баллы**
полное решение	7 баллов
в верном решении используется, что $a \neq 0$ (или $c \neq 0$) без анализа вырожденного случая	5 баллов
при решении путем раскрытия модулей не все случаи разобраны	не более 3 баллов
верно проанализирован случай $c = 0$ (или $a = 0$)	2 балла
разбор других частных случаев	0 баллов

5. УСЛОВИЕ

Владислав Владимирович, взяв менее 100 рублей, пошёл гулять. Заходя в какое-либо кафе и имея при этом *m* рублей *n* копеек, он тратил *n* рублей *m* копеек (*m* и *n* – натуральные числа). Какое наибольшее число кафе мог посетить Владислав Владимирович?

Решение. Способ первый. Пусть при входе в первое кафе Владислав Владимирович имел a рублей b копеек. Ясно, что $b \leqslant a$. Тогда при выходе он будет иметь $a-b-1$ рублей и $b-a+100$ копеек. Пусть $a-b = t \leqslant 99$. Итак, у Владислава Владимировича сейчас $t-1$ рубль $100-t$ копеек. Условие возможности посещения второго кафе: $t-1 \geqslant 100-t$, или (так как t — целое) $t \geqslant 51$. После посещения второго кафе у Владислава Владимировича $2t-102$ рублей и $201-2t$ копеек, чтобы можно было посетить третье, необходимо и достаточно, чтобы $t \geqslant 76$. Аналогично, чтобы посетить четвёртое кафе, необходимо и достаточно, чтобы $t \geqslant 89$, чтобы пятое — $t \geqslant 95$, чтобы шестое — $t \geqslant 98$, а чтобы седьмое — t должно быть больше, чем 99. Последнее невозможно, а предыдущее неравенство выполнимо. Значит, ответ 6.

Способ второй. Для посещения кафе необходимо, чтобы количество рублей в кошельке Владислава Владимировича было не меньше количества копеек. Пусть разность между числом рублей и копеек равна p ($0 \leqslant p < 100$) и пусть копеек z. Тогда рублей $z+p$, в кафе тратится z рублей $z+p$ копеек, поэтому при выходе у Владислава Владимировича останется p рублей без p копеек, т.е. $p-1$ руб $100-p$ копеек. Разница теперь составляет $2p-101$, что во-первых, меньше, чем p (так как $2p-101-p = p-101 < 0$), а во-вторых тем больше, чем больше было p.

Таким образом, максимальное количество кафе будет посещено при наибольшем начальном значении p, т.е. если Владислав Владимирович имел изначально 99 рублей 00 копеек. Проследим за состоянием кошелька в этом случае. После первого кафе остаётся 98 руб 01 коп, после второго — 96 руб 03 коп, после третьего — 92 руб 07 коп, после четвёртого — 84 руб 15 коп, после пятого — 68 руб 31 коп, после шестого — 36 руб 63 коп, в седьмом кафе расплатиться уже не удастся.

Ответ: 6.

есть в работе	**баллы**
полное решение	7 баллов
доказано, что 7 кафе посетить нельзя (при отсутствии примера для 6 кафе)	4 балла
приведён пример для 6 кафе, но его оптимальность не доказана	3 балла
любые примеры для меньшего, чем 6, посещений кафе или доказательство, что 8 и более кафе посетить нельзя	0 баллов
ответ без обоснования	0 баллов

6. УСЛОВИЕ

На координатной плоскости xOy отмечена точка A (1; 2). За один ход разрешается выбрать действительное число a и отметить на плоскости точку, симметричную одной из уже отмеченных относительно прямой $y = ax - (2a + 1)$. Может ли за несколько ходов на плоскости появиться среди отмеченных точек точка B(-1; 1)? Ответ обосновать.

Решение. Заметим, что при всяком a прямая $y = ax - (2a + 1)$ проходит через точку $P(2;\ -1)$. Так как при симметрии относительно некоторой прямой l расстояние от любой точки этой прямой до любой точки F и до её образа F^* одинаково, все отмеченные точки будут находится на одном и том же расстоянии от точки P. Но $PA = \sqrt{(2-1)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{10}$, а $PB = \sqrt{(2-(-1))^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{13}$, поэтому точка B никогда не появится среди отмеченных.

Ответ: Не может.