2017 год

Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный этап

Решения

10 класс

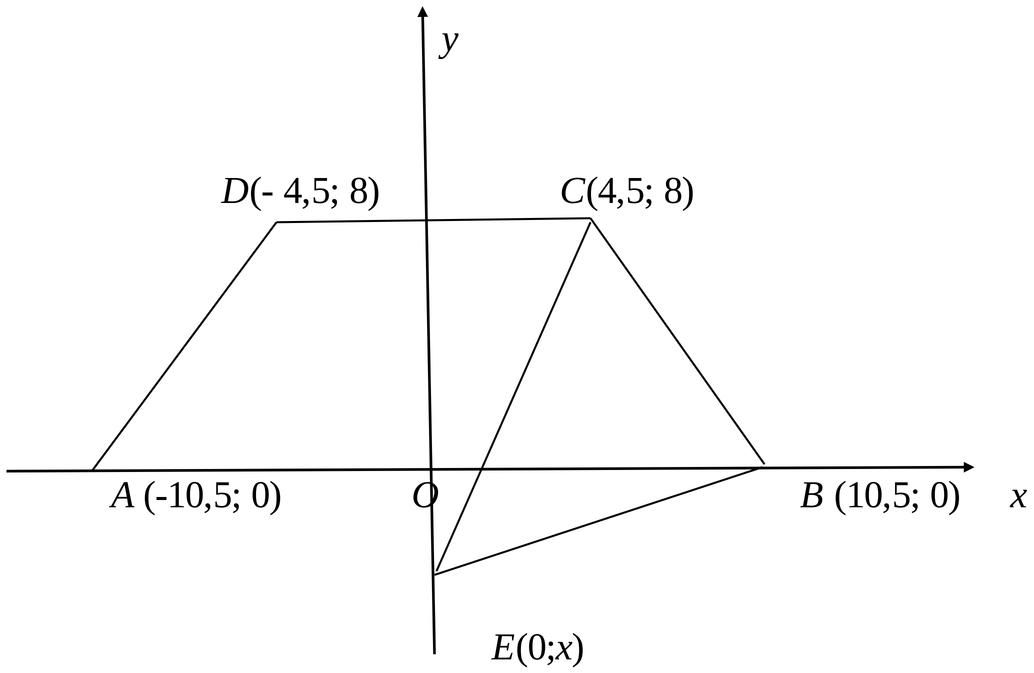
1. Обозначим четырехзначное число $\overline{xy17}$. Тогда число $\overline{xy17}$ - 17 тоже делится на 17. Но $\overline{xy17}$ - 17 = 100$\cdot\overline{xy}$ + 17 - 17 = 100$\cdot\overline{xy}$. Так как числа 100 и 17 являются взаимно простыми, то двузначное число $\overline{xy}$ делится на 17. Перебором находим все двузначные числа, делящиеся на 17: 17, 34, 51, 68, 85. Их всего пять. Тогда искомых чисел также будет пять:1717, 3417, 5117, 6817, 8517.

Ответ: 5.

2. Так как 25, 41, 65 – члены арифметической прогрессии, то
$25 = a_1 + kd;$ $41 = a_1 + nd;$ $65 = a_1 + md,$ где k, n, m - натуральные числа. Из данных трех равенств следует, что $16 = (n – k)d,$ $24 = (m – n)d.$ Из данных двух равенств получаем:
$8 = (m –2n + k)d.$ Так как $2017 = 1 + 2016$, а $2016 = 252\cdot8 = 3\cdot8 + 249\cdot8 = 24 + + 249\cdot8 = 24 + 249(m –- 2n + k)d,$ то $2017 = 1 + 24 + 249(m -2n + k)d = 25 + + 249(m -2n + k)d = a_1 + kd + 249(m - 2n + k)d = a_1 + (249m – 498n + 250 k)d$ или $2017 = a_1 + ld,$ где l – натуральное положительное число. То есть, 2017 является членом этой же последовательности.

Ответ: Да, является.

3. Введем прямоугольную систему координат следующим образом: ось абсцисс направим вправо по большей стороне трапеции, точку O выберем в середине большей стороны, а ось ординат – направим перпендикулярно оси абсцисс (смотри рисунок).



Обозначив вершины трапеции буквами *A, B, C, D*, получим: *A*(-10,5; 0), *B*(10,5; 0), *C*(4,5; 8), *D*(-4,5; 8). Пусть точка *E* – центр искомой окружности. Тогда координаты ее будут *E*(0; *x*). Применим формулу расстояния между двумя точками и, учитывая, что *EC* = *EB* = *r*, найдем EC^2 и EB^2: $EC^2 = 4{,}5^2 + (8 - x)^2$, $EB^2 = 10{,}5^2 + (0 - x)^2$. Приравнивая правые части данных равенств, получаем, что *x* = - 1,625. Тогда *r* = *EB* = $= \sqrt{10{,}5^2 + 1{,}625^2} = 10{,}625$.

Замечание. Задачу можно решить и без координатного метода.

Ответ: 10,625.

4. Допустим, что данные уравнения имеют общий корень x_0. Вычтем из равенства $x_0^4 + bx_0 + c = 0$ равенство $x_0^4 + ax_0 + d = 0$. Получим $(b-a)x_0 + (c-d) = 0$, из которого получаем: $(b-a)x_0 = d - c$. Так как по условию *b* > *a*, *d* > *c*, то *b* – *a* > 0 и *d* – *c* > 0. Поэтому $x_0 > 0$. Но положительное число не может быть корнем многочлена, у которого все коэффициенты положительны. Значит, уравнения $x^4 + bx + c = 0$ и $x^4 + ax + d = 0$ не могут иметь общих корней.

Ответ: Не могут.

5. Назовем выигрышной позицией ту, сделав ход в которую мы выигрываем; а проигрышной позицией ту, при которой мы проигрываем. Очевидно, что все позиции, из которых можно попасть в выигрышную, являются проигрышными (если мы сделали ход в такую позицию, то противник следующим ходом может оказаться в выигрышной ситуации и выиграть). Аналогично позиции, из которых можно попасть только в проигрышные, являются выигрышными (так как сделав ход в такую позицию, мы вынуждаем противника ходить в проигрышную позицию). Вернемся теперь к нашей игре. Получив число 1000, мы выигрываем, поэтому 1000 – выигрышная позиция. Попасть в 1000 можно из 501, 502, 503, …, 999, значит все эти позиции проигрышные. Из числа 500 можем попасть только в одно из чисел 501, 502, 503, …, 999, то есть только в проигрышную позицию. Значит, 500 – выигрышная позиция. Аналогично далее 251, 252, … 499 – проигрышные позиции, а 250 – выигрышная позиция. Рассуждая далее аналогично, получаем выигрышные позиции 125, 62, 31, 15, 7, 3. Таким образом, первым ходом первый игрок попадает в выигрышную позицию: 2 + 1 = 3. Чтобы выиграть, он должен придерживаться следующей стратегии: каждый свой ход делать в выигрышную ситуацию. Очевидно, что такая возможность у него всегда есть. Рассмотрим данную стратегию:

Ход	Первый игрок	Второй игрок
1	$2 + 1 = 3$	$3 + a$
2	$3 + a + 4 – a = 7$	$7 + b$
3	$7 + b + 8 – b = 15$	$15 + c$
4	$15 + c + 16 – c = 31$	$31 + d$
5	$31 + d + 31 – d = 62$	$62 + e$
6	$62 + e + 63 – e = 125$	$125 + f$
7	$125 + f + 125 – f = 250$	$250 + g$
8	$250 + g + 250 – g = 500$	$500 + h$
9	$500 + h + 500 – h =1000$	

Таким образом, на девятом ходу первый игрок выигрывает.

Ответ: первый.