11 класс

1. Найдите функцию $f(x)$, для которой на всей ее области определения справедливо равенство

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Решение

Например, функция $f(x) = x - \frac{1}{x}$.

Далее убедимся, что эта функция удовлетворяет уравнению на всей своей области определния.

Область определения функции $f(x) = x - \frac{1}{x}$ – все действительные числа кроме 0.

Функция $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - x$ и определена для всех x из области определения $f(x)$.

$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x} - x = 0$ - верно для любого $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Критерии

В решении существенны два этапа:

1) проверка того, что фукция $f\left(\frac{1}{x}\right)$ определена для любого x из области определения функции $f(x)$

2) проверка выполнения $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ для любого x из области определения функции $f(x)$.

Верно подобрана функция, но отсутствует ровно один из этапов – 4 балла.

Верно подобрана функция, но отсутствуют оба этапа – 1 балл.

Примечание: может быть указана другая функция, то есть не обязательнно $f(x) = x - \frac{1}{x}$.

2. Найдите все значения a, при которых уравнение $|x| - x^2 = a^2 - sin^2 \pi x$ не имеет решений.

Решение

С помощью преобразования графиков основных элементарных функций строим схематично графики функций $y = |x| - x^2$ и $y = -sin^2 \pi x$ (рис.4).

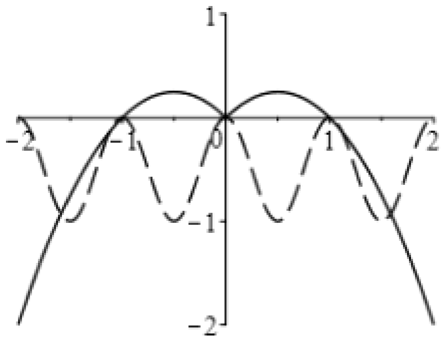

Рис.4

Функция $y = |x| - x^2$ ограничена сверху и свое наибольшее значение $y = \frac{1}{4}$ принимает при $x = -\frac{1}{2}$ и $x = \frac{1}{2}$.

Областью значений функции $y = a^2 - sin^2 \pi x$ является отрезок $[a^2 - 1,\ a^2]$.

В частности, при $x=-\frac{1}{2}$ и $x=\frac{1}{2}$ функция принимает свое наименьшее значение a^2-1.
Наибольшее значение функции $y=|x|-x^2$ совпадает с наименьшим значением функции $y=a^2-sin^2\pi x$ в точках $x=-\frac{1}{2}$ и $x=\frac{1}{2}$ при $a^2-1=\frac{1}{4}$
Значит, при $a^2-1\le\frac{1}{4}$ уравнение имеет решения, а при $a^2-1>\frac{1}{4}$ - не имеет. Получаем ответ $a\in\left(-\infty,-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{5}}{2},+\infty\right)$.

Критерии

Изображены схематично графики функций, решение верное, но не содержит обоснования условия $a^2-1\ge\frac{1}{4}$ - 4 балла.

Если в решении задачи не изображены графики фукций, то верное решение должно обязательно содержать обоснование, что при $a^2-1\le\frac{1}{4}$ графики функций будут иметь общие точки. При отсутствии этого обоснования - 4 балла.

3. Плоскости α и β пересекаются. Точки M и N не лежат в этих плоскостях. Из точки M на плоскость α опустили перпендикуляр и из точки N на плоскость β опустили перпендикуляр и эти перпендикуляры оказались в одной плоскости. Затем из точки M на плоскость β опустили перпендикуляр и из точки N на плоскость α опустили перпендикуляр. Обязательно ли и эти перпендикуляры лежат в одной плоскости?

Решение

Пусть прямая a есть прямая пересечения плоскостей α и β. O - основание перпендикуляра, опущенного из точки M на плоскость α, Q - основание перпендикуляра, опущенного из точки N на плоскость β. A - основание перпендикуляра, опущенного из точки M на плоскость β, B - основание перпендикуляра, опущенного из точки N на плоскость α.

1) MO и NQ лежат в одной плоскости γ по условию и пересекаются как перпендикуляры к пересекающимся плоскостям.

MO и NB параллельны (как прямые перпендикулярные одной плоскости), следовательно NB параллельна плоскости γ или лежит в ней (по определению прямой, параллельной плоскости). Однако прямая NB имеет общую точку N с плоскостью γ. Значит, прямая NB лежит в плоскости γ.

2) Докажем, что точка A тоже лежит в плоскости γ.

MA параллельна NQ (как прямые перпендикулярные к одной плоскости). Следовательно, MA параллельна плоскости γ или лежит в ней (по определению прямой параллельной плоскости). А так как MA имеет общую точку M с плоскостью γ, то прямая MA лежит в плоскости γ.

Таким образом, и вторая пара перпендикуляров (MA и BN) лежит в одной плоскости.

Критерии

За отсутствие обоснования какого-либо вывода (например, нет упоминания об определении прямой, параллельной плоскости, а этот факт применяется в решении задачи) снимается 1 балла.

4. В акционерном обществе 2017 акционеров, причем любые 1500 из них имеют контрольный пакет акций (не менее 50% акций). Какую наибольшую долю акций может иметь один акционер?

Решение

Упорядочим акционеров по возрастанию их доли акций. 1500-й акционер имеет не менее $\frac{50}{1500}\% = \frac{1}{30}\%$ акций. Если у 1500-го меньше, то у первых 1500 акционеров акций меньше, чем 50%. Значит, первые 2016 акционеров имеют в сумме не менее $50\% + (2016 - 1500)\frac{1}{30}\% = 67{,}2\%$ акций. Наибольшая доля 2017-го акционера 32,8% акций.

Критерии

Решение, в котором получен верный ответ, но предполагается, что у <u>каждого</u> акционера не менее $\frac{1}{30}\%$, оценивать в 4 балла.

При верном ходе решения допущена одна вычислительная ошибка, которая привела к неверному ответу, - 5 баллов.

5. Решите неравенство

$$sin^3x + cos^3x + \sqrt{sinx + cosx + 3} \geq 3 - 3\ sinx\ cosx\ (sinx + cosx)$$

Решение

Преобразуем неравенство к виду

$$(sinx + cosx)^3 + \sqrt{sinx + cosx + 3} \geq 3 \quad (*)$$

Сделаем замену $t = sinx + cosx$ и рассмотрим функцию $y = t^3 + \sqrt{t + 3}$ (**). Эта функция непрерывна и возрастает на всей своей области определения (как сумма двух возрастающих функций), следовательно, каждое свое значение принимает ровно один раз. Значение 3 эта функция принимает при $t = 1$. При значениях $t \geq 1$ функция принимает значения, не меньшие 3.

Остается решить неравенство $sinx + cosx \geq 1$ (***).

Получаем решение $2\pi n \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$

Критерии

Неравенство преобразовано к виду (*) и сделана замена (**) - 2 балла.

Неравенство преобразовано к виду (*), сделана замена (**), угадано решение $t \geq 1$ и (без обоснования) - 3 балла.

Неравенство преобразовано к виду (*), сделана замена (**), угадано решение $t \geq 1$ (без обоснования) и верно решено неравенство (***) - 4 балла.

Неравенство преобразовано к виду (*), сделана замена (**), угадано решение $t \geq 1$ и обоснован этот равосильный переход в решении неравенства (с помощью свойства возрастания функции), но уравнение (***) не решено или решено с существенной ошибкой - 4 балла.