11 класс

1. Студент за 5 лет учения сдал 31 экзамен. В каждом следующем году он сдавал больше экзаменов, чем в предыдущем, а на пятом курсе сдал втрое больше экзаменов, чем на первом курсе. Сколько экзаменов он сдал на четвертом курсе?

Ответ: 8.

Решение: Пусть a, b, c, d, e – количество экзаменов, сданных в каждом из годов обучения. По условию, $a + b + c + d + e = 31$, $a < b < c < d < e$.
Заменим в равенстве числа b, c, d, e на заведомо не большие:
$a + (a+1) + (a+2) + (a+3) + 3a \leq 31$. Получаем, $7a \leq 25$. Заменив эти же числа на заведомо не меньшие, получим $a + (3a - 3) + (3a - 2) + (3a - 1) + 3a \geq 31$. Получаем $13a \geq 37$. Отсюда $a = 3$. При этом $e = 9$, $b + c + d = 19$.
Если $d < 8$, то эта сумма не больше $5 + 6 + 7 = 18$. Подходят числа 5, 6, 8.
Критерии оценки. Только ответ не оценивается. Ответ с примером всех пяти чисел – 2 балла.

2. Величины α и β острых углов удовлетворяют равенству
$\sin^2\alpha + \sin^2\beta = \sin(\alpha + \beta)$. Доказать, что $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$.

Решение. Из условия следует, что $\sin\alpha(\sin\alpha - \cos\beta) = \sin\beta(\cos\alpha - \sin\beta)$.
Если $\sin\alpha > \cos\beta$ и $\cos\alpha > \sin\beta$, то $1 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha > \sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$ – противоречие. Точно также получается противоречие, если обратить знаки в двух предыдущих неравенствах. Значит, $\sin\alpha = \cos\beta$ и $\cos\alpha = \sin\beta$.
Следовательно, $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$, что и требовалось доказать.

3. Деревня рыцарей и лжецов на карте имеет вид клетчатого квадрата 9×9, в каждой клетке живет один человек – рыцарь или лжец. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Соседними считаются клетки, примыкающие друг к другу по стороне или углу. Каждый житель сказал: «Среди моих соседей нечётное число лжецов». Чётно или нечётно количество лжецов в деревне?

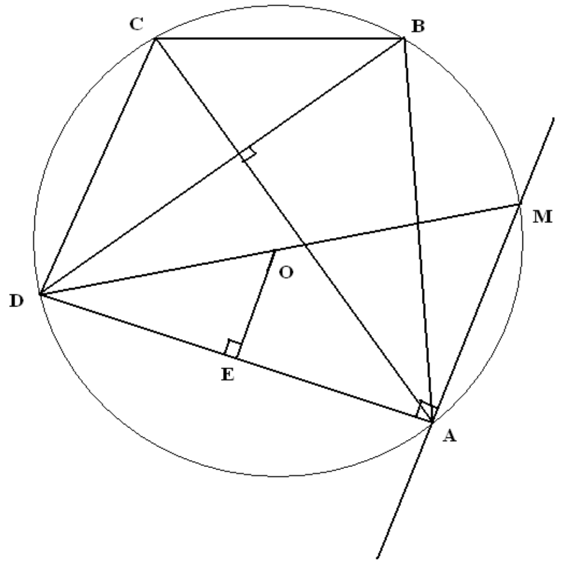
Решение. Разобьем доску на девять квадратов 3×3. Докажем, что в каждом таком квадрате нечетное количество лжецов. Рассмотрим жителя из центральной клетки. Если он рыцарь, то среди его соседей нечётное число лжецов и значит и во всём квадрате их нечётное число. Если он лжец, то среди его соседей - чётное число лжецов, да еще он сам и в итоге в квадрате – нечётное число лжецов.
Так как сумма девяти нечётных чисел нечётна, значит нечётно и общее число лжецов.

Критерии оценки. Есть идея разбиения на квадраты 3×3 – один балл.

Указано, что в квадрате 3×3 нечётное число лжецов, но не доказано – три балла.
Замечание. Не требуется приводить пример, что такое возможно, хотя это и несложно. Например, девять лжецов в центральных клетках квадратов 3×3, а остальные - рыцари.

4. Около четырехугольника $ABCD$ описана окружность с центром в точке O. Диагонали четырехугольника перпендикулярны. Найдите длину стороны BC, если расстояние от точки O до стороны AD равно 1.

Ответ: $BC = 2$
Решение. Пусть $OE \perp AD$, тогда $OE = 1$. Проведем через точку A прямую перпендикулярную AD, которая пересекают окружность в точке M. Тогда DM – диаметр и $DO = OM$. Так как $\angle DBA = \angle DMA$ (как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу), $\angle MDA = 90° - \angle DMA$ и $\angle CAB = 90° - \angle DBA$, то $\angle CAB = \angle MDA$. Следовательно, дуга AM равна дуге BC и $BC = AM$. ΔMDA подобен ΔODE (по двум равным углам) с коэффициентом подобия $\frac{1}{2}$, значит, $2OE = AM = BC = 2$.



Критерии оценки.
Доказано подобие ΔOED и ΔCBA – 2 балла.

5. Даны 700 различных натуральных чисел, каждое из которых не превосходит 2017. Доказать, что какие-то два из них отличаются или на 3, или на 4, или на 7.

Решение. Пусть $S_1 = \{n_1, n_2, ..., n_{700}\}$ есть множество данных чисел. Обозначим $S_2 = \{n_1 + 3, n_2 + 3, ..., n_{700} + 3\}$, $S_3 = \{n_1 + 7, n_2 + 7, ..., n_{700} + 7\}$. Пусть $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$. Числа множества S не превосходят 2024. Если предположить, что множества S_1, S_2, S_3 попарно не пересекаются, то множество S содержит не менее 2100 различных чисел, не превосходящих 2024, что невозможно. Следовательно, либо $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$, либо $S_2 \cap S_3 \neq \emptyset$, либо $S_1 \cap S_3 \neq \emptyset$. В первом случае на множестве S_1 найдутся два числа, отличающиеся на 3, во втором – в S_1 найдутся два числа, отличающиеся на 4, в третьем случае найдутся два числа, отличающиеся на 7.