11 класс

1. Доказать, что если между каждыми двумя цифрами числа 1331 вставить по равному числу нулей, то получится полный куб.

Решение: Вставим между каждыми двумя цифрами по n нулей, получим число, в записи которого содержится $3n + 4$ цифр.

$$1\underbrace{00...0}_{n}3\underbrace{00...0}_{n}3\underbrace{00...0}_{n}1 = 10^{3n+3} + 3\cdot 10^{2n+2} + 3\cdot 10^{n+1} + 1 = \left(10^{n+1}\right)^3 + 3\cdot\left(10^{n+1}\right)^2 +$$

$+3\cdot 10^{n+1} + 1 = \left(10^{n+1}+1\right)^3$. Что и требовалось доказать.

Рекомендации: если рассмотрены частные случаи (1 ноль, 2 нуля и т.д.), то 1 балл.

2. Решите уравнение: $\boldsymbol{\dfrac{7}{x^2 - x + 2} - \dfrac{23}{x^2 - x + 3} + \dfrac{17}{x^2 - x + 4} = 0}$.

Решение: Сделаем замену $y = x^2 - x + 3$, получим уравнение

$$\frac{7}{y-1} - \frac{23}{y} + \frac{17}{y+1} = 0$$

$$7y(y+1) - 23\left(y^2 - 1\right) + 17y(y-1) = 0, \quad \begin{cases} y \neq 0 \\ y \neq \pm 1 \end{cases}$$

$$y^2 - 10y + 23 = 0$$

$y = 5 \pm \sqrt{2}$, оба значения удовлетворяют ОДЗ.

Выполним обратную замену: 1) $x^2 - x + 3 = 5 + \sqrt{2}$

$x^2 - x - 2 - \sqrt{2} = 0, D = 1^2 - 4\left(-2 - \sqrt{2}\right) = 9 + 4\sqrt{2} = 8 + 2\cdot 1\cdot 2\sqrt{2} + 1 = \left(2\sqrt{2} + 1\right)^2$,

$x = 1 \pm \left(2\sqrt{2} + 1\right)$, $x_1 = 2 + 2\sqrt{2}$, $x_2 = -2\sqrt{2}$.

2) $x^2 - x + 3 = 5 - \sqrt{2}$

$x^2 - x - 2 + \sqrt{2} = 0, D = 1^2 - 4\left(-2 + \sqrt{2}\right) = 9 - 4\sqrt{2} = 8 - 2\cdot 1\cdot 2\sqrt{2} + 1 = \left(2\sqrt{2} - 1\right)^2$,

$x = 1 \pm \left(2\sqrt{2} - 1\right)$, $x_3 = 2 - 2\sqrt{2}$, $x_4 = 2\sqrt{2}$.

Ответ: $2 \pm 2\sqrt{2}$; $\pm 2\sqrt{2}$.

Рекомендации: если без замены правильно получено уравнение с переменной x, то есть $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 2 = 0$, то 1 балл. Если при решении квадратных уравнений правильно вычислены дискриминанты, но не извлечён корень из иррационального выражения, то есть получены ответы в форме $x = 1 \pm \sqrt{9 \pm 4\sqrt{2}}$, то 4 балла.

3. Теоретически, имеющиеся в совхозе комбайны, работая вместе, могут убрать урожай за одни сутки. Однако по плану комбайны вступают в работу последовательно: в первый час работает лишь один комбайн, во второй – два, в третий – три и т.д. до тех пор, пока все комбайны не начинают работать вместе. Затем комбайны работают все вместе до полной уборки урожая. В результате время работы по плану в 1,5 раза больше теоретического. Сколько комбайнов в совхозе?

Решение: Пусть в совхозе n комбайнов. Тогда производительность каждого равна $\frac{1}{24n}$ часть урожая в час.

По плану в первый час работает 1 комбайн и убирает $\frac{1}{24n}$ часть урожая, во второй час работают 2 комбайна и за второй час они убирают $\frac{2}{24n}$ часть урожая, в третий час 3 комбайна убирают $\frac{3}{24n}$ часть урожая и т.д., пока в работу не вступит n-ый комбайн и в n-ый час они убирают $\frac{n}{24n}=\frac{1}{24}$ часть урожая.

Затем все n комбайнов работают с общей производительностью $\frac{1}{24}$ в теченииk часов и убирают $\frac{k}{24}$ часть урожая. В итоге будет убран весь урожай, то есть $\frac{1}{24n}+\frac{2}{24n}+\frac{3}{24n}+...+\frac{n}{24n}+\frac{k}{24}=1$.

Так как при работе по плану продолжительность работы в 1,5 раза больше теоретических 24 часов, то есть составляет 36 часов, то $n+k=36$.

$$\frac{1}{24n}+\frac{2}{24n}+\frac{3}{24n}+...+\frac{n}{24n}+\frac{36-n}{24}=1$$

$$\frac{1+2+3+...+n}{24n}+\frac{36-n}{24}=1$$

$$\frac{(n+1)n}{48n}+\frac{36-n}{24}=1$$

$$\frac{n+1+72-2n}{48}=1$$

$$73-n=48$$

$$n=25$$

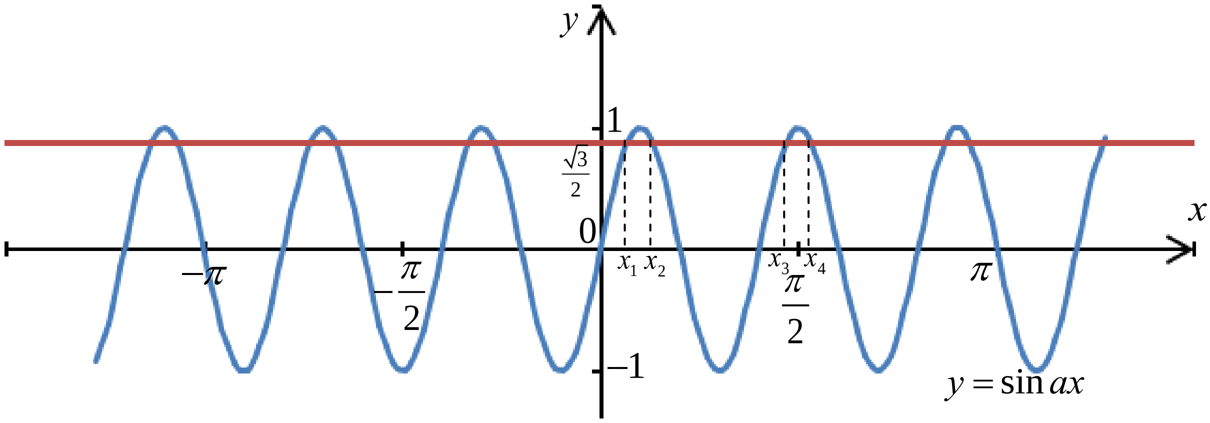
Итак, в совхозе 25 комбайнов.

Ответ: 25.

4. При каких значениях параметра $a > 0$ уравнение $\sin ax = \frac{\sqrt{3}}{2}$ имеет в промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ ровно 3 корня?

Решение: Уравнение $\sin ax = \frac{\sqrt{3}}{2}$ имеет две группы корней $x = \frac{\pi}{3a} + \frac{2\pi k}{a},\ k \in \mathbb{Z};\ x = \frac{2\pi}{3a} + \frac{2\pi n}{a},\ n \in \mathbb{Z}.$

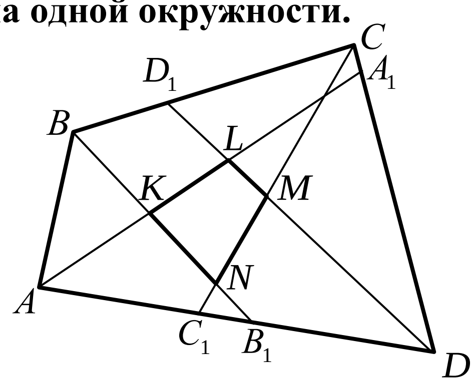
График функции $y = \sin ax$ проходит через начало координат и сжат [растянут] в $|a|$ $\left[\frac{1}{|a|}\right]$ раз. Чтобы на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ было 3 корня, очевидно, график должен быть сжат, т.е. $a > 1$.



Обозначим положительные корни уравнения по порядку их следования: $x_1 = \frac{\pi}{3a};\ x_2 = \frac{2\pi}{3a};\ x_3 = \frac{7\pi}{3a};\ x_4 = \frac{8\pi}{3a}$. Чтобы на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ находилось ровно 3 корня, надо чтобы x_3 входил в этот промежуток, а x_4 – не входил. То есть $\begin{cases} x_3 \le \frac{\pi}{2} \\ x_4 > \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7\pi}{3a} \le \frac{\pi}{2} \\ \frac{8\pi}{3a} > \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge 4\frac{2}{3} \\ a < 5\frac{1}{3} \end{cases}.$

Ответ: $\left[4\frac{2}{3};\ 5\frac{1}{3}\right).$

5. Доказать, что если в произвольном четырёхугольнике *ABCD* провести внутренние биссектрисы, то четыре точки пересечения биссектрис углов *A* и *C* с биссектрисами углов *B* и *D* лежат на одной окружности.



Решение: Пусть в четырёхугольнике $ABCD$ проведены биссектрисы AA_1, BB_1, CC_1, DD_1.

Обозначим точки пересечения AA_1 с BB_1 и DD_1 как K и L, а точки пересечения CC_1 с BB_1 и DD_1 как N и M соответственно.

Получим четырёхугольник $KLMN$.

Обозначим углы исходного четырёхугольника $ABCD$: $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$, $\angle D = \delta$.

Так как AA_1 биссектриса, то $\angle BAA_1 = \dfrac{\alpha}{2}$; так как BB_1 биссектриса, то $\angle ABB_1 = \dfrac{\beta}{2}$. Рассмотрим $\triangle ABK$, в нём сумма углов равна 180°, то есть

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \angle AKB = 180° \;\Rightarrow\; \angle AKB = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}.$$

$$\angle LKN = \angle AKB = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}.$$

Аналогично, рассмотрим $\triangle CMD$: $\angle DCM + \angle CDM + \angle CMD = 180° \Rightarrow$

$$\Rightarrow\; \frac{\gamma}{2} + \frac{\delta}{2} + \angle CMD = 180° \;\Rightarrow\; \angle CMD = 180° - \frac{\gamma}{2} - \frac{\delta}{2}.$$

$$\angle LMN = \angle CMD = 180° - \frac{\gamma}{2} - \frac{\delta}{2}.$$

В четырёхугольнике $KLMN$ $\angle LKN + \angle LMN = 180° - \dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{\beta}{2} + 180° - \dfrac{\gamma}{2} - {}$

$- \dfrac{\delta}{2} = 360° - \dfrac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{2} = 360° - \dfrac{360°}{2} = 180° \Rightarrow$ вокруг $KLMN$ можно описать окружность, то есть эти 4 точки лежат на одной окружности.

Что и требовалось доказать.

Рекомендации: если рассмотрен особый случай четырёхугольника (квадрат, прямоугольник, параллелограмм), то 2 балла.