ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
2017-2018 УЧЕБНЫЙ ГОД

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

11 КЛАСС

Общее количество баллов **35. Решение каждой задачи оценивается Жюри из 7 баллов** в соответствии с критериями и методикой оценки, разработанной центральной предметно-методической комиссией:

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения.**
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако решение содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3-4	Верно рассмотрен один из существенных случаев.
2	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии правильного решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Указания к оцениванию отдельных задач содержатся в комментариях к решениям.

1. На доске записаны натуральные числа от 1 до n, кратного 50. Вася утверждает, что если стереть с доски все числа, которые делятся на 50, то сумма оставшихся чисел является квадратом некоторого натурального числа. Прав ли Вася?

Ответ. Вася прав.

Решение. Пусть $n = 50m$. Тогда сумма оставшихся чисел равна

$$(1+2+\cdots+50m)-50(1+2+\cdots+m) = 25m(50m+1)-25m(m+1) = 25\cdot 49m^2 = (35m)^2.$$

Комментарий. *Верный ответ получен на основании рассмотрения частных случаев – 2 балла. При верном подходе допущены вычислительные ошибки – 3 балла. При отсутствии решения за потенциально полезные идеи и подходы – 1-2 балла. Ответ без обоснования – 0 баллов.*

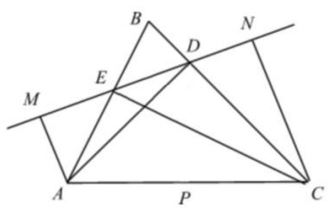
2. Найдите все целые решения уравнения $3\cdot 2^x + 1 = y^2$.

Ответ. (0,2), (3,5), (4,7).

Решение. Заметим, что $x \geq 0$ (иначе y не целое). Если $x = 0$, то $y = 2$. Пусть x – натуральное, тогда y нечётное, обозначим $y = 2k+1$. Получаем $3\cdot 2^x + 1 = (2k+1)^2$, или $3\cdot 2^x = 4k^2 + 4k$, откуда $3\cdot 2^{x-2} = k(k+1)$. Поскольку k и $k+1$ взаимно просты, возможны случаи $k = 3, k+1 = 2^{x-2}$ или $k+1 = 3,\ k = 2^{x-2}$. Первый случай даёт ответ $x = 4, y =7$, во втором случае $x = 3, y = 5$.

Комментарий. *Показано, что при x натуральном y нечётно – 1 балл. Если решения уравнения найдены подбором, и не доказано, что других нет – по 1 баллу за каждое найденное решение.*

3. В остроугольном треугольнике ABC проведены две высоты AD и CE. На прямую DE из точек A и C опустили перпендикуляры AM и CN. Докажите, что $ME = DN$.



Решение. Так как $\angle ADC = \angle AEC$, то четырехугольник $AEDC$ – вписанный. По свойству вписанного четырехугольника $\angle NDC = \angle BAC = \alpha$, $\angle MEA = \angle BCA = \gamma$. Тогда, используя прямоугольные треугольники AME и

AEC, получим: $ME = AE \cdot \cos\gamma = AC \cdot \cos\alpha \cdot \cos\gamma$. Аналогично, $DN = DC \cdot \cos\alpha = AC \cdot \cos\alpha \cdot \cos\gamma$.

Комментарий. *Доказано, что четырехугольник $AEDC$ вписанный – 2 балла. Найдены пары равных углов – еще 2 балла. При отсутствии решения за доказательство полезных вспомогательных утверждений – 1-3 балла.*

4. Гномы Глоин, Оин и Траин нашли 70 одинаковых драгоценных камней и хотят разделить их между собой так, что каждый из них получит не менее 10 камней. Сколькими способами гномы смогут это сделать?

Ответ. 861.

Решение. Выдадим каждому гному по 9 камней, а оставшиеся 43 камня выложим в ряд. Чтобы разделить оставшиеся камни между гномами, достаточно расположить на 42 места между камнями два разделителя. Глоин получит камни левее первого разделителя, Оин – камни между двумя разделителями, а Траин – камни правее второго разделителя. Число способов расположить эти два разделителя равно $\frac{42 \cdot 41}{2} = 861$.

Комментарий. *За вычислительную ошибку при верных рассуждениях снижать на 1 балл. За потенциально полезные, но не реализованные идеи – 1-2 балла.*

5. Для каких натуральных чисел $n \geq 3$ можно за конечное количество шагов из набора чисел $1, 2, \dots, n$ получить набор из n одинаковых чисел, если за один шаг можно выбирать два произвольных числа и увеличивать каждое из них на произвольное одинаковое натуральное число?

Ответ. Для всех $n \neq 4k + 2$.

Решение. Покажем, что для $n = 4k$ это возможно. В этом случае на доске выписан набор чисел:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, 4k-3, 4k-2, 4k-1, 4k.$$

Поступаем следующим образом: $(1; 3) \to (2; 4), (5; 7) \to (6; 8), \dots, (4k-3; 4k-1) \to (4k-2; 4k)$.

Теперь на доске записаны все чётные числа, при этом каждое число встречается ровно два раза:

$$2, 2, 4, 4, 6, 6, \dots, 4k-2, 4k-2, 4k, 4k.$$

Далее все одинаковые числа объединяем в пары и приводим к виду $(4k; 4k)$.

Для $n = 2k + 1$ это также возможно. В этом случае на доске выписан набор чисел:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, 2k-2, 2k-1, 2k, 2k+1.$$

Первый шаг: $(1; 2k+1) \to (2; 2k+2)$, тогда на доске записаны числа:

$$2, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, 2k-2, 2k-1, 2k, 2k+2.$$

Второй шаг: $(3; 2k+2) \to (4; 2k+3)$, тогда на доске записаны числа:

$$2, 2, 4, 4, 5, 6, \dots, 2k-2, 2k-1, 2k, 2k+3.$$

Третий шаг: $(5; 2k+3) \to (6; 2k+4)$, тогда на доске записаны числа:

$$2, 2, 4, 4, 6, 6, \dots, 2k-2, 2k-1, 2k, 2k+4.$$

Тогда после -ого такого шага имеем на доске числа:

$$2, 2, 4, 4, 6, 6, \dots, 2k-2, 2k-2, 2k, 2k, 3k+1.$$

Таким образом, на доске записаны все чётные числа, меньшие $2k + 1$. При этом каждое число встречается ровно дважды. А также записано число $3k + 1$. Далее все одинаковые числа объединяем в пары и приводим к виду $(3k + 1; 3k + 1)$.

Докажем методом от противного, что для $n = 4k + 2$ это невозможно. Сумма чисел с самого начала нечётная: $1 + 2 + \dots + 4k + 2 = \frac{1}{2}(4k+2)(4k+3) = (2k+1)(4k+3)$. Каждый раз сумму всех чисел мы увеличиваем на чётное число, но в конце все числа должны стать одинаковыми, то есть их сумма будет чётной. Полученное противоречие завершает доказательство.

Комментарий. *7 баллов за полное решение задачи данным способом можно разложить следующим образом: рассмотрен один из случаев $n = 4k$ или $n = 2k + 1$ – 2 балла, рассмотрены оба этих случая – 5 баллов. Рассмотрен случай $n = 4k + 2$ – еще 2 балла. При отсутствии решения за рассмотрение примеров – 1-2 балла.*