Муниципальный этап Российской олимпиады по математике 2017-18 учебного года
11 класс *(Время решения – 4 часа)*

1. Дан конечный набор карточек. На каждой из них написано либо число 1, либо число -1 (на каждой карточке ровно одно число), при этом карточек с -1 на 100 больше, чем карточек с 1. Если для каждой пары различных карточек найти произведение чисел на них, и все эти произведения просуммировать, то получится число 1000. Сколько есть карточек с числом 1?

   Ответ. 3950.

   Решение. Пусть количество карточек с 1 равно m, количество карточек с -1 равно k. Тогда среди всех пар ровно $\frac{m(m-1)}{2}$ пар из двух однёрок, $\frac{k(k-1)}{2}$ пар из двух -1, и mk пар из 1 и -1. Значит сумма из условия равна $\frac{m(m-1)}{2}+\frac{k(k-1)}{2}-mk$, отсюда $m^2-2mk+k^2=2000+m+k$, $(m-k)^2=2000+m+k$. По условию $k-m=100$, значит $m+k=8000$ и $2m=7900$, $m=3950$.

   Комментарий. Получено верное соотношение, связывающее k и m (кроме $k-m=100$), но без дальнейших продвижений — 3 балла.

2. Дан квадратный трёхчлен $f(x)$ с ненулевым коэффициентом при x^2. Докажите существование такого натурального n, что многочлен $g(x)=f(x)+f(x+1)+\ldots+f(x+n)$ не имеет действительных корней.

   Первое решение. Пусть $f(x)=ax^2+bx+c$, без ограничения общности можно считать, что $a>0$. $f(x)>0$ вне какого-то отрезка с центром $-\frac{b}{2a}$ (или вообще всюду), значит найдётся натуральное t такое, что $f(-\frac{b}{2a}+t)>0$ и $f(-\frac{b}{2a}-t)>0$. Рассмотрим параболу $h(x)=f(x)+f(x+2t)$. Абсцисса её вершины есть $-\frac{b}{2a}-t$, и так как $h(-\frac{b}{2a}-t)=f(-\frac{b}{2a}-t)+f(-\frac{b}{2a}-t+2t)=f(-\frac{b}{2a}-t)+f(-\frac{b}{2a}+t)>0$, то $h(x)>0$ всюду (старший коэффициент у h положителен).

   Возьмём $n=4t-1$, тогда $g(x)$ разобьётся на сумму выражений $f(x+c)+f(x+c+2t)$. Все такие суммы получаются из $h(x)$ сдвигом на вектор $(-c,0)$, значит они все положительны. Итак, $g(x)>0$ при любом x.

   Второе решение. Пусть $f(x)=ax^2+bx+c$, без ограничения общности можно считать, что $a>0$. Так как $a>0$, то решением неравенства $f(x)<1$ является либо пустое множество, либо интервал конечной длины. Значит найдётся отрезок с целыми концами $[s,t]$, вне которого $f(x)\geqslant 1$. Известно, что $f(x)\geqslant f(-\frac{b}{2a})$, значит найдётся целое M такое, что $f(x)>M$. Если $M\geqslant 0$, то можно взять $n=1$, поэтому дальше в решении будем считать, что $M<0$.

   Заметим, что $f(x+c)>M$, так как график $f(x+c)$ получается из графика функции $f(x)$ параллельным переносом на вектор $(-c,0)$. По тем же причинам $f(x+c)\geqslant 1$ вне $[s-c,t-c]$.

   Возьмём $n=(t-s+1)|M|+t-s+1$. Любое x попадёт не более чем в $t-s+1$ отрезков вида $[s-k,t-k]$ (при целом k). Значит сумму $g(x)$ можно снизу оценить числом $(t-s+1)M+n+1-(t-s+1)=1$. Итак, $g(x)\geqslant 1$ при любом x, значит $g(x)>0$ всюду.

3. Докажите, что если у тетраэдра два отрезка, идущие из концов некоторого ребра в центры вписанных окружностей противолежащих граней, пересекаются, то отрезки, выпущенные из концов скрещивающегося с ним ребра в центры вписанных окружностей противолежащих этим концам граней, также пересекаются.

Решение. Пусть дан тетраэдр $ABCD$, ребро из условия есть AB, E — центр вписанной в треугольник BCD окружности, F — центр вписанной в треугольник ACD окружности. Так как отрезки AE и BF пересекаются, то они лежат в одной плоскости α. CD и AB скрещивающиеся прямые, значит CD пересекает α ровно в одной точке. Прямые AE и BF есть биссектрисы углов CAD и CBD соответственно, значит каждая из них пересекает CD. Так как прямые AE и BF обе лежат в α, то они пересекают CD в одной и той же точке T.

Из свойства биссектрис $\frac{AD}{AC} = \frac{TD}{TC} = \frac{BD}{BC}$, отсюда $\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC}$. Значит биссектрисы углов ADB и ACB пересекают AB в одной и той же точке N, поэтому они лежат в одной плоскости DCN, но в этой же плоскости лежат отрезки, выпущенные из концов ребра CD в центры вписанных окружностей граней ACB и ADB. Понятно, что эти отрезки пересекутся, как две чевианы в треугольнике DCN, проведённые к его сторонам.

Комментарий. Получено соотношение $\frac{AD}{AC} = \frac{BD}{BC}$ — 3 балла.

4. Про натуральные числа n и m известно, что $\sqrt{3} - \frac{m}{n} > 0$.
Докажите, что $\sqrt{3} - \frac{m}{n} > \frac{1}{2mn}$.

   Решение. Так как $\sqrt{3} - \frac{m}{n} > 0$, то $\sqrt{3}n - m > 0$, $\sqrt{3}n > m$, $3n^2 > m^2$. Так как n и m натуральные, то $3n^2 \geqslant m^2 + 1$. Квадрат целого числа при делении на три может давать остатки 0 и 1, значит $m^2 + 1$ может давать при делении на три остатки 1 и 2. Поэтому равенство $3n^2 = m^2 + 1$ невозможно. Отсюда $3n^2 > m^2 + 1$, $3n^2 \geqslant m^2 + 2$, $3n^2m^2 \geqslant m^4 + 2m^2 > m^4 + m^2 + \frac{1}{4}$, $\sqrt{3}nm > m^2 + \frac{1}{2}$, $\sqrt{3} > \frac{m}{n} + \frac{1}{2nm}$, $\sqrt{3} - \frac{m}{n} > \frac{1}{2mn}$.

   Комментарий. Получено только соотношение $3n^2 > m^2$ — 0 баллов.

   Получено только соотношение $3n^2 \geqslant m^2 + 1$ — 1 балл.

   Получено соотношение $3n^2 \geqslant m^2 + 2$ — 3 балла.

5. Каждая точка плоскости покрашена либо в синий, либо в красный цвет. Докажите, что найдётся треугольник с вершинами одного цвета и меньшей стороной длины 1, отношение величин углов которого равно $1 : 2 : 4$.

   Решение. Предположим, что такого треугольника нет и придём к противоречию. Рассмотрим правильный семиугольник $A_1A_2 \ldots A_7$ со стороной длины 1. Заметим, что треугольник $A_1A_2A_4$ устроен так, как указано в условии. Действительно, $\angle A_1A_4A_2 = \frac{\pi}{7}$, $\angle A_4A_1A_2 = \frac{2\pi}{7}$, $\angle A_1A_2A_4 = \frac{4\pi}{7}$, и сторона $A_1A_2 = 1$ меньшая, так как лежит против меньшего угла. Значит вершины этого треугольника, и всех получающихся из него поворотами и отражениями, не могут быть одноцветны по предположению.

   Хотя бы две соседних вершины семиугольника одного цвета. Если предположить противное, то цвета вершин должны чередоваться. Тогда, если A_1 синяя, то A_2 красная, и т.д. Пройдя весь семиугольник, получим что все нечётные вершины синие, но значит нашлись соседние синие вершины A_1 и A_7.

   Итак, есть две соседние одноцветные вершины, без ограничения общности можно считать что это A_4 и A_5 синего цвета. Вершины треугольников $A_2A_4A_5$ и $A_4A_5A_7$ не одноцветны, значит A_2 и A_7 красные. Тогда A_3 и A_6 синие, и нашёлся треугольник $A_3A_5A_6$, все вершины которого синие.