ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

2017-2108 УЧЕБНЫЙ ГОД ВТОРОЙ ЭТАП

11 КЛАСС

РЕШЕНИЯ

1. Упростим левую часть данного уравнения, получим:

$$2017x^2-\frac{2+2\cdot 2017}{2}\cdot 2017x+\frac{1+2\cdot 2017-1}{2}\cdot 2017=0,$$

$$2017x^2-2018\cdot 2017x+2017^2=0,$$

$$x^2-2018x+2017=0.$$

По теореме Виета получим, $x=1$ или $x=2017$.

Ответ: 1, 2017.

2. По теореме Безу остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $x-a$ равен значению многочлена в точке a, т.е. $P(a)$.

Разделим многочлен $P(x)$ на произведение $(x-1)\cdot(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-2018)$ с остатком, получим

$$P(x)=(x-1)\cdot(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-2018)\cdot Q(x)+R(x),$$

где $Q(x)$ и $R(x)$ некоторые многочлены, причем $R(x)$ многочлен не выше 2017-й степени.

Заметим, что для многочлена $R(x)$ справедливы равенства

$$R(1)=1,\ R(2)=2,\ \ldots,\ R(2018)=2018.$$

Рассмотрим многочлен $r(x)=x$. Для этого многочлена справедливы равенства

$$r(1)=1,\ r(2)=2,\ \ldots,\ r(2018)=2018.$$

Таким образом, два многочлена не выше 2017-й степени совпадают в 2018 точках, а значит они совпадают всюду.

Действительно, предположим противное, что $R(x)\neq r(x)$. Рассмотрим разность $S(x)=R(x)-r(x)$. Многочлен $S(x)$ представляет собой многочлен не выше 2017-й степени и имеет 2018 корней 1, 2, …, 2018. Но многочлен степени n имеет не более n корней. Получили противоречие.

Значит, $R(x)=x$.

Замечание. Если из равенства двух многочленов в 2018-ти точках сделан вывод об их равенстве всюду без доказательства, то балл не снижается.

Ответ: x.

3. По смыслу задачи $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Возведем обе части в квадрат, получим: $x+y+2\sqrt{xy}=2017$.

Рассмотрим выражение $(2017+x-y)^2$, получим

$$(2017+x-y)^2=\left(x+y+2\sqrt{xy}+x-y\right)^2=4x\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2=4\cdot 2017\cdot x.$$

Так как выражение $(2017+x-y)^2$ является полным квадратом, то произведение $4\cdot 2017\cdot x$ является полным квадратом.

Значит, $x=2017\cdot k^2$, $k\in Z$.

Подставим найденное значение x в исходное уравнение, получим

$$\sqrt{2017}\cdot|k|+\sqrt{y}=\sqrt{2017}.$$

Заметим, что если $|k|\geq 2$, то уравнение не имеет решений в силу того, что левая часть больше правой.

Если $k=0$, то $x=0$, $y=2017$.

Если $|k|=1$, то $x=2017$, $y=0$.

Ответ: $(0;\ 2017)$, $(2017;\ 0)$.

4.

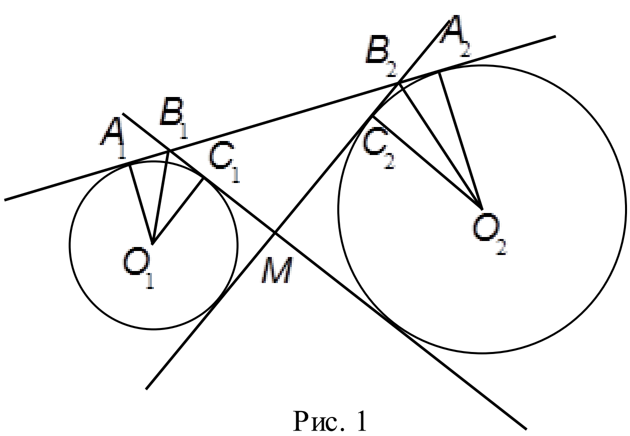

Рис. 1

Обозначим через S искомую площадь треугольника MB_1B_2 (рис. 1). Проведем радиусы данных окружностей с центрами O_1 и O_2 в точки касания, получим точки A_1, C_1, A_2 и C_2 соответственно.

Пусть $\angle A_1O_1C_1 = \alpha$, тогда $\angle A_2O_2C_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

Действительно, по свойству внешних углов треугольника

$$\angle A_1B_1C_1 = \angle B_1B_2M + \angle B_1MB_2,$$

$$\angle A_2B_2C_2 = \angle B_2B_1M + \angle B_1MB_2.$$

Складывая последние равенства, получим

$$\angle A_1B_1C_1 + \angle A_2B_2C_2 = \angle B_1B_2M + \angle B_1MB_2 + \angle B_2B_1M + \angle B_1MB_2 = \frac{3\pi}{2}.$$

В силу того, что $\angle A_1B_1C_1 = \pi - \angle A_1O_1C_1$ и $\angle A_2B_2C_2 = \pi - \angle A_2O_2C_2$, получим

$$(\pi - \angle A_1O_1C_1) + (\pi - \angle A_2O_2C_2) = \frac{3\pi}{2}.$$

Откуда,

$$\angle A_1O_1C_1 + \angle A_2O_2C_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Далее заметим, что в силу перпендикулярности общих внутренних касательных $C_1M = 1$ и $C_2M = 2017$.

Получим,

$$S = \frac{1}{2} \cdot MB_1 \cdot MB_2 = \frac{1}{2} \cdot (1 + B_1C_1)(2017 + B_2C_2) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(1 + tg\frac{\alpha}{2}\right)\left(2017 + 2017 \cdot tg\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2017 \cdot \left(1 + tg\frac{\alpha}{2}\right)\left(1 + \frac{1 - tg\frac{\alpha}{2}}{1 + tg\frac{\alpha}{2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2017 \cdot \left(1 + tg\frac{\alpha}{2} + 1 - tg\frac{\alpha}{2}\right) = 2017.$$

Ответ: 2017.

5. Заметим, что $2017 = 13 \cdot 155 + 2$, т.е. все камни на столе можно разбить на 155 равных кучек по 13 камней и еще 2 камня.

Первым ходом первый игрок берет 2 камня себе, а затем поступает следующим образом:

1) если второй игрок берет себе со стола k камней, то первый игрок берет со стола $13 - k$ камней;

2) если второй игрок кладет на стол k камней, то первый игрок берет со стола k камней.

В результате применения этих операций, первый игрок добьется того, что у второго игрока не будет возможности сделать ход, так как на столе и на руках у него не останется камней.

Ответ: выигрывает первый игрок.