Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике

2017/18 учебный год

11 класс

Ответы и решения задач

1. УСЛОВИЕ

Вычислите *arctg* 1 + *arctg* 2 + *arctg* 3.

Решение. Так как *arctg* 1 = $\pi/4$, то достаточно вычислить *arctg* 2 + *arctg* 3. Из формулы для тангенса суммы углов следует, что если α = *arctg* 2, β = *arctg* 3, то *tg* $(\alpha + \beta) = (2 + 3)/(1 - 2\cdot 3) = -1$. Но, $\alpha, \beta \in (0; \pi/2)$, поэтому $0 < \alpha + \beta < \pi$, значит, $\alpha + \beta = 3\pi/4$.

Замечание. Задачу можно решить геометрически.

2. УСЛОВИЕ

Существуют ли два последовательных натуральных числа, большие 1 000 000, такие, что суммы их цифр являются точными квадратами?

Решение. Искомыми являются, например, числа n = 999 999 999 и n + 1 = 1 000 000 000, у которых суммы цифр S(n) = 81, S(n + 1) = 1.

Ответ: существуют.

3. УСЛОВИЕ

Докажите, что в произведении $P = 1! \times 2! \times \ldots \times 100!$ Можно вычеркнуть один из сомножителей так, чтобы произведение оставшихся было полным квадратом.

Доказательство. Из равенства $(2k)! = (2k - 1)! \times 2k$ следует, что данное произведение можно переписать в виде $(1!)^2 \times 2 \times (3!)^2 \times 4 \times (5!)^2 \times 6 \times \ldots \times (99!)^2 \times 100 = (1! \times 3! \times 5! \times \ldots \times 99!)^2 \times 2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times 100 = (1! \times 3! \times 5! \times \ldots \times 99!)^2 \times 2^{50} \times 50! = (1! \times 3! \times 5! \times \ldots \times 99! \times 2^{25})^2 \times 50!$

Ответ: можно вычеркнуть 50!.

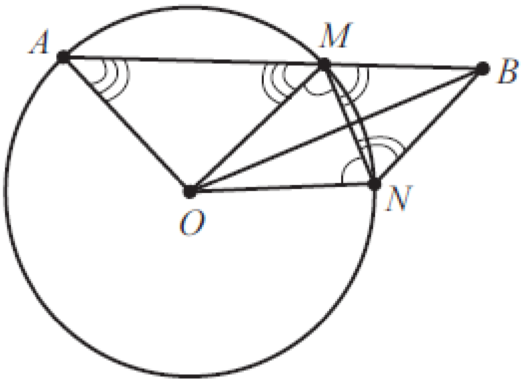
4. УСЛОВИЕ

Пусть AM – отличная от диаметра хорда окружности с центром в точке O. На продолжении этой хорды за точку M отметили точку B. Точка N симметрична точке M относительно прямой OB. Докажите, что четырёхугольник $AONB$ можно вписать в окружность.

Доказательство. Так как точки M и N симметричны относительно прямой OB, $OM = ON$ (откуда, в частности, следует, что точка N попадает на данную в задаче окружность) и $BM = BN$. Тогда $\angle OMN = \angle ONM$ и $\angle BMN = \angle BNM$, как углы при основаниях равнобедренных треугольников OMN и BMN соответственно (см. рисунок). Наконец, $\angle OAM = \angle OMA$, как углы при основании равнобедренного треугольника OAM. Теперь подсчитаем сумму двух противоположных углов четырёхугольника $AONB$:

$$\angle OAB + \angle ONB = \angle OAM + \angle ONM + \angle BNM = \angle OMA + \angle OMN + \angle NMB = 180^0.$$

Приведенный подсчёт показывает, что четырёхугольник $AONB$ может быть вписан в окружность.



Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
верное доказательство	7 баллов
в верном доказательстве имеются не вполне очевидные и не обоснованные переходы	5 баллов
доказано равенство углов OMB и ONB	3 балла
введена система координат, верно определены координаты всех точек из условия, но решения нет и не прописан алгоритм дальнейшего доказательства	2 балла
имеется идея подсчёта суммы противоположных углов четырёхугольника $AONB$ без дальнейшего продвижения	1 балл

5. УСЛОВИЕ

Пусть a > 0, b > 0. Докажите неравенство $2\sqrt{a}+3\sqrt[3]{b}\geq 5\sqrt[5]{ab}$.

Доказательство.

Способ 1. Пусть $a^{10}=x$, $b^{15}=y$. Тогда неравенство принимает вид $2x^5+3y^5\geqslant 5x^2y^3$. Теперь положим $t=\dfrac{y}{x}$ (t может быть любым положительным числом) и получим неравенство $3t^5-5t^3+2\geqslant 0$, Проанализируем функцию в левой части неравенства. Её производная равна $15t^4-15t^2$, поэтому на отрезке $[0,1]$ функция убывает, а на луче $[1,+\infty)$ - возрастает. Остаётся заметить, что в точке $t=1$ функция равна 0.

Примечание: Анализ функции $f(t)=3t^5-5t^3+2$ можно провести и не используя производную. Например так. Разложим многочлен на множители $3t^5-5t^3+2=(t-1)(3t^4+3t^3-2t^2-2t-2)=(t-1)^2(3t^3+6t^2+4t+2)$. При $t>0$ все слагаемые второй скобки неотрицательны, а одно равно 2, то есть выражение во второй скобке строго положительно. Значит, при $t>0$ минимум функции равен 0 и достигается в точке $t=1$.

Способ 2. После замены, как в первом способе (замену можно и вовсе не делать, но тогда выкладки будут менее наглядными) докажем полученное неравенство $2x^5+3y^5\geqslant 5x^2y^3 \Leftrightarrow 2x^5+3y^5-5x^2y^3\geqslant 0$ для положительных чисел x и y. Проведём преобразования левой части

$$2x^5+3y^5-5x^2y^3=2x^5-2x^2y^3+3y^5-3x^2y^3=2x^2(x^3-y^3)-3y^3(x^2-y^2)=$$

$$=(x-y)(2x^2(x^2+xy+y^2)-3y^3(x+y))=(x-y)(2x^4+2x^3y+2x^2y^2-3xy^3-3y^4)=$$

$$=(x-y)(2x^4-2y^4+2x^3y-2xy^3+x^2y^2-xy^3+x^2y^2-y^4)=$$

$$=(x-y)(2(x-y)(x+y)(x^2+y^2)+2xy(x-y)(x+y)+xy^2(x-y)+y^2(x-y)(x+y))=$$

$$=(x-y)^2(2(x+y)(x^2+y^2)+2xy(x+y)+xy^2+2(x+y)).$$

Теперь неотрицательность полученного выражения очевидна: первый множитель квадрат некоторого выражения, то есть неотрицателен, а все слагаемые второго множителя, значит, и он сам, положительны.

Примечание: На самом деле задача решается в одну строчку, если знать неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим n положительных чисел, которое выглядит так $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}{n}\geqslant\sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n}a_i}$ (все $a_i\geqslant 0$). Надо только взять $n=5$, $a_1=a_2=\sqrt{a}$ и $a_3=a_4=a_5=\sqrt[3]{b}$.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
верное доказательство	7 баллов
при верном ходе решения есть алгебраические ошибки, не влияющие на доказательство	6 баллов
при разложении на множители допущена одна алгебраическая ошибка, не позволившая доказать неравенство	4 балла
неравенство верно сведено к анализу функции от одной переменной (явно указана функция), но анализ не проведён или имеется попытка разложить выражение на множители, но разложение не доведено до конца (напр. только выделен множитель $x - y$)	3 балла
замечена однородность данного неравенства, то есть то, что после деления обеих частей на a или b получается неравенство одной переменной	2 балла
сделана замена, избавляющая неравенство от иррациональных выражений	1 балл
иллюстрация утверждения на конкретных примерах и/или любые выкладки, не ведущие к решению	0 баллов

От школьника не требуется приведение доказательства неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим *n* положительных чисел, даже если это неравенство используется в решении.

6. УСЛОВИЕ

На заводе работают ровно 217 женщин, среди которых 17 брюнеток, а остальные 200 – блондинки. Перед Новым Годом все они покрасили свои волосы, и каждая из этих женщин написала «ВКонтакте» фамилии ровно 200 женщин завода, по её мнению, точно являющихся блондинками. При этом каждая из брюнеток указала верно всех блондинок, а каждая блондинка могла указать на кого угодно, кроме себя. Докажите, что на основании этих данных можно выявить по крайней мере 13 блондинок.

Решение. По условию задачи верный список всех 200 блондинок будет «ВКонтакте» ровно у 17 сотрудниц завода: брюнетки напишут именно его, а блондинка его не напишет никогда, так как в противном случае она должна была бы указать в нём и себя. Значит, если некоторый список встречается не 17 раз, а любое другое количество, то он неверный, и его составила блондинка. Уберём все списки, которые встречаются ровно 17 раз. Останется 217 – 17n списков. 217 – 17n ≥ 0, поэтому n ≤ 12 (мы помним, что n – число натуральное). Тогда осталось не менее 217 – 12·17 = 13 списков, и мы вычислили не менее 13 их авторов – блондинок.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верное доказательство	7 баллов
Обосновано, что верный список блондинок встречается ровно в 17 списках (без дальнейшего продвижения)	4 балла
Обосновано, что верный список блондинок встречается хотя бы 17 раз (без дальнейшего продвижения)	2 балла
Имеется только идея определять блондинок, как авторов неверных списков	1 балл
Любые идеи, не ведущие к доказательству	не оцениваются