Департамент образования Ярославской области
Всероссийская олимпиада школьников 2017/2018 учебного года

Математика, 11 класс, муниципальный этап

Общие принципы проверки и оценивания олимпиадных работ

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор одного из случаев методом, позволяющим решить задачу в целом, доказательство леммы, используемой в одном из доказательств, нахождение примера или доказательства оценки в задачах типа «оценка + пример» и т.п.). Наконец, возможны как существенные, так и не влияющие на логику рассуждений логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать все вышеперечисленное.

В соответствии со стандартными правилами проведения математических олимпиад школьников ***каждая задача оценивается в целое число баллов от 0 до 7***.

Соответствие правильности решения и выставляемых баллов приведено в таблице.

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

При проверке работ следует руководствоваться следующими важными принципами:

1. Любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри.

2. При проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень ее правильности и полноты.

3. Олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении.

4. Недопустимо выставлять баллы «за старание участника», в том числе за запись в работе сколь угодно большого по объему текста, не содержащего полезных продвижений в решении задачи.

5. При проверке результата выполнения каждого задания в работе участника олимпиады более высоким приоритетом обладают критерии оценки конкретного задания, приведенные в материалах для жюри.

6. Победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов, поэтому не следует в обязательном порядке «разводить по местам» лучших участников олимпиады.

Решения и указания по проверке

Оценивается только математическая правильность, корректность, полнота решения; баллы не снижаются за «недостаточную» красоту, оптимальность решения, за исправления и помарки (позволяющие прочитать и оценить текст работы), за отличие от приведенных ниже возможных вариантов рассуждений. ***При этом оценка «7 баллов» ставится за любое верное (!) решение.***

Все решения, если не указано противное, требуют обоснования.

Если решения не совпадают с приведенными, читайте внимательно!

1. Решите уравнение: $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\cos x\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\sin x\right)$.

<u>Ответ:</u> $\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\quad k\in Z$; $\qquad 2\pi k,\quad k\in Z$.

Решение:

По формуле приведения преобразуем правую часть уравнения:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\sin x\right).$$

Равенство синусов возможно в одном из следующих случаев:

<u>Случай 1:</u> $\dfrac{\pi}{2}\cos x=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{2}\sin x+2\pi n$ (при целом n).

Преобразуем это к такому виду: $\cos x+\sin x=1+4n$.

При $n\ge 1$ получаем, что $\cos x+\sin x\ge 5$. При $n\le -1$ получаем, что $\cos x+\sin x\le -3$.

Оба этих случая невозможны (даже при грубой оценке $\cos x+\sin x$ не превосходит по модулю 2). Поэтому $n=0$, а уравнение сводится к такому: $\cos x+\sin x=1$.

Возведем все в квадрат, преобразуем к следующему виду: $2\cos x\sin x=0$.

Тогда возможны два варианта.

(1) $\cos x=0$, тогда из равенства $\cos x+\sin x=1$ получим, что $\sin x=1$ – это удовлетворяет исходному уравнению: $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\cdot 0\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cdot 1\right)$, так что все такие x (при которых $\cos x=0$ и $\sin x=1$) подходят – это значения $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\quad k\in Z$.

(2) $\sin x=0$, тогда из равенства $\cos x+\sin x=1$ получим, что $\cos x=1$ – это удовлетворяет исходному уравнению: $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\cdot 1\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cdot 0\right)$, все такие x (при которых $\sin x=0$ и $\cos x=1$) подходят – это значения $x=2\pi k,\quad k\in Z$.

<u>Случай 2:</u> $\dfrac{\pi}{2}\cos x=\pi-\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{2}\sin x\right)+2\pi n$ (при целом n).

Преобразуем это к такому виду: $\cos x-\sin x=1-4n$.

Аналогично предыдущему случаю делаем вывод, что равенство возможно только при $n=0$, а уравнение сводится к $\cos x-\sin x=1$.

Решаем его так же, как выше, получаем две серии решений: $x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\quad k\in Z$ и $x=2\pi k,\quad k\in Z$ (дублирует ранее полученное).

<u>Критерии:</u>
Полный верный ответ без верного обоснования – 2 балла.
Неравносильные переходы-следствия без проверки (почему не наберем лишних корней) – ставить не более 3 баллов (при верном ответе).
Нет пояснений, почему уравнение сводится к одному из случаев $\cos x + \sin x = 1$ *или* $\cos x - \sin x = 1$ *– ставить не более 3 баллов (при верном ответе).*

2. Дима утверждает, что придумал квадратное уравнение, имеющее два отрицательных корня. А на следующий день Дима переставил коэффициенты этого уравнения и утверждает, что теперь уравнение имеет два положительных корня. Может ли Дима оказаться прав?

<u>Ответ</u>: нет.

Решение:

Если оба корня квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ положительны, то сумма корней положительна, но по теореме Виета она равна $-b/a$, поэтому a и b разных знаков.

Если же оба корня уравнения $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ отрицательны, то сумма корней отрицательна и равна $-b_1/a_1$ (то есть, a_1 и b_1 одного знака), а произведение корней положительно и равно c_1/a_1 (то есть, c_1 и b_1 одного знака) – стало быть, в этом случае все три коэффициента одного знака. Поэтому, если Дима прав, то сначала у него был квадратный трехчлен, в котором все коэффициенты были одного знака, а при перестановке коэффициентов получился трехчлен, у которого есть коэффициенты разного знака – это невозможно.

<u>Критерии:</u>
Верный ответ без верного обоснования в баллах не оценивается.
Баллы не ставятся при рассмотрении частных случаев уравнений (например, «пусть у Димы было записано квадратное уравнение $x^2 + 3x + 2 = 0$*, тогда…»).*
При верном рассмотрении только приведенного квадратного уравнения можно поставить не более 2 баллов.
Применение теоремы Виета для трехчлена общего вида (для проверки знаков отношений коэффициентов) без дальнейших продвижений – 2 балла.

3. Учитель записал на доске дробь $\dfrac{an+b}{cn+d}$ (числа a, b, c, d, n – натуральные). Вова смог сократить дробь (числитель и знаменатель) на 2017. Докажите, что тогда $ad - bc$ делится на 2017.

Решение:
Числитель и знаменатель делятся на 2017, поэтому делится на 2017 выраженное через них значение $ad - bc = a\cdot(cn+d) - c\cdot(an+b)$.

<u>Критерии:</u>
Рассмотрение частных случаев значений a, b, c, d, n в баллах не оценивается.

4. На сторонах *BC* и *AD* выпуклого четырехугольника *ABCD* отмечены их середины – точки *M* и *N* соответственно. Отрезки *MN* и *AC* пересекаются в точке *O*, причем *MO* = *ON*. Известно, что площадь треугольника *ABC* равна 2017. Найдите площадь четырехугольника *ABCD.*

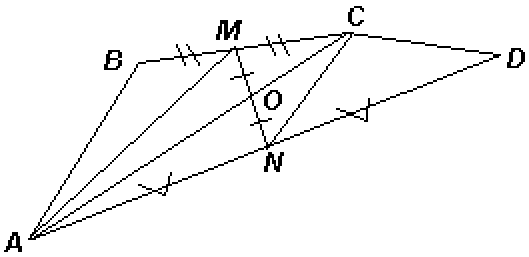
<u>Ответ</u>: 4034.

Решение:

Пусть AC и MN пересекаются в точке O (см. первый рисунок справа), $S_{\Delta ABC} = 2017 = S$.

Докажем, что $S_{\Delta ADC} = S_{\Delta ABC}$, тогда $S_{ABCD} = 2S$.

Можно рассуждать различными способами.



Первый способ.

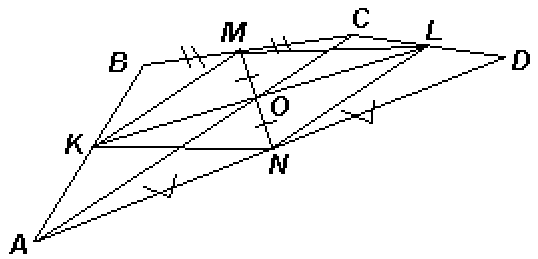
Проведем AM и CN (см. первый рисунок). Так как AO – медиана треугольника AMN, то $S_{\Delta AON} = S_{\Delta AOM}$. Аналогично, $S_{\Delta CON} = S_{\Delta COM}$.

Следовательно, $S_{\Delta ANC} = S_{\Delta AMC}$. Так как AM и CN – медианы треугольников ABC и ADC соответственно, то $S_{\Delta ADC} = 2\,S_{\Delta ANC} = 2\,S_{\Delta AMC} = S_{\Delta ABC} = S$.

Второй способ.

Пусть K и L – середины сторон AB и CD, тогда $KMLN$ – параллелограмм, поэтому отрезок KL содержит точку O (см. второй рисунок).

Так как KL – средняя линия треугольника ABC, то $S_{\Delta KOM} = \frac{1}{4}\,S_{\Delta ABC} = \frac{1}{4}S$.

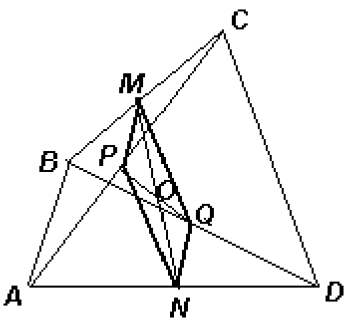


Аналогично, $S_{\Delta NOL} = \frac{1}{4}\,S_{\Delta ADC}$. Так как $S_{\Delta NOL} = S_{\Delta KOM}$, то $S_{\Delta ADC} = S_{\Delta ABC} = S$.

Отметим, что KMLN – это параллелограмм Вариньона, площадь которого равна половине площади ABCD.

Третий способ.

Воспользуемся тем, что в любом выпуклом четырехугольнике $ABCD$ середины M и N противолежащих сторон и середины P и Q диагоналей являются вершинами параллелограмма (см. третий рисунок).

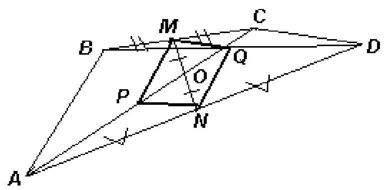


Следовательно, середина O отрезка MN является также и серединой отрезка PQ.

Так как в нашем случае точка O лежит на диагонали AC, то середина Q диагонали BD также лежит на AC (см. четвертый рисунок).

Тогда $S_{\Delta ADQ} = S_{\Delta ABQ}$ и $S_{\Delta CDQ} = S_{\Delta CBQ}$.

Следовательно, $S_{\Delta ADC} = S_{\Delta ABC} = S$.



<u>Критерии:</u>

Верный ответ без верного обоснования в баллах не оценивается.

За доказательство равенства площадей отдельных элементов треугольника без дальнейших верных продвижений (без доведенного до конца решения) ставить суммарно не более 2 баллов.

5. В футбольном чемпионате Анчурии принимают участие 18 команд. Каждое воскресенье проходит очередной тур: все команды разбиваются на пары и в каждой паре проходит футбольный матч. Уже прошло 8 туров, при этом никакие две команды не играли между собой более одного раза. Верно ли, что тогда обязательно можно найти три команды, среди которых никакие две между собой не играли?

Ответ: верно.

Решение:

Рассмотрим одну из команд, обозначив ее через A. Так как за 8 туров она сыграла с восемью командами, то с девятью она не сыграла. Если среди этих девяти есть две команды B и C, не сыгравшие между собой, то A, B и C образуют искомую тройку команд.

В противном случае эти 9 команд сыграли между собой полный круговой турнир. Для этого потребовалось $\frac{9\cdot 8}{2} = 36$ матчей. Однако, в каждом туре они могли играть между собой не более четырех матчей, поэтому за 8 туров таких матчей могло быть сыграно не более 32.

Полученное противоречие показывает, что искомая тройка команд обязательно найдется.

Критерии:

Верный ответ без верного обоснования в баллах не оценивается.

Доказательство того, что невозможен полностью сыгранный за 8 туров круговой турнир на 9 команд – 3 балла.