ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

2017-2108 УЧЕБНЫЙ ГОД ВТОРОЙ ЭТАП

7-8 КЛАСС

РЕШЕНИЯ

1. Пусть $a \cdot b \cdot (a+b) = 20182017$. Так как число 20182017 нечётно, то и каждый из множителей слева нечётен. Но если a и b – нечётные числа, то их сумма $a+b$ чётна и всё произведение $a \cdot b \cdot (a+b)$ будет чётным. Получили противоречие. Значит, число 20182017 получиться не могло.

Ответ: не могло.

2. $a^5 + b^3 + c = (a^5 - a) + (b^3 - b) + (a + b + c) =$

$= (a-1)a(a+1)(a^2+1) + (b-1)b(b+1) + (a+b+c)$

Каждое слагаемое суммы делится на шесть. Значит, и сумма делится на шесть.

3. Пронумеруем все дыни: $Д_1, Д_2, \dots, Д_{10}$.

Проводим шесть взвешиваний:

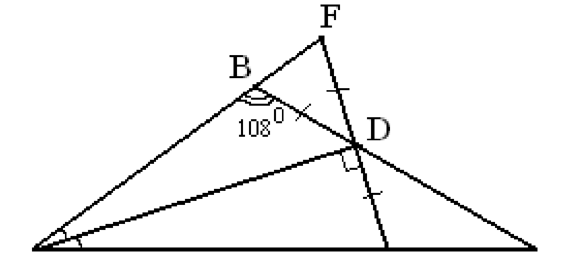
1 – дыни $Д_1, Д_2, Д_3$; 4 - дыни $Д_1, Д_2, Д_4$;

2 – дыни $Д_2, Д_3, Д_4$; 5 - дыни $Д_5, Д_6, Д_7$;

3 - дыни $Д_1, Д_3, Д_4$; 6 - дыни $Д_8, Д_9, Д_{10}$.

Пусть S_1 – общая масса 1-го, 2-го, 3-го и 4-го взвешиваний; S_2 – общая масса 5-го и 6-го взвешиваний; S – суммарная масса всех дынь. Тогда $S = \frac{S_1}{3} + S_2$.

4.



Пусть F – точка пересечения DE и AB.

$\angle FBD = 72^0$.

Рассмотрим ΔADF:

$\angle AFD = \angle ADF - \angle FAD = 90^0 - 18^0 = 72^0$.

Так как $\angle FBD = \angle AFD = 72^0$, то ΔBFD – равнобедренный. Значит, BD = FD.

В ΔAFE: $\angle FAE = 36^0$, $\angle AFE = 72^0$, следовательно, $\angle AEF = 72^0$.

Так как $\angle AEF = \angle AFE = 72^0$, то ΔAFE – равнобедренный, FE – основание.

По условию DE - перпендикуляр к биссектрисе AD, тогда AD – высота и биссектриса равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, а, следовательно, и медиана ΔAFE. Значит, $FD = DE$.

Так как $BD = FD$ и $FD = DE$, то $BD = DE$. Что и требовалось доказать.

5. Первоначально на столе имеется одна кучка из 2017 алмазов. После каждого хода число кучек увеличивается на одну. В конце получится 2017 кучек по 1 алмазу. Значит, независимо от игры участников будет сделано 2016 ходов и выиграет игрок, начинавший вторым. Таким образом, чтобы забрать себе все алмазы Али-Баба должен уступить право первого хода разбойнику.