

**Муниципальный этап
Всероссийской олимпиады школьников
по математике
2017/18 учебный год
7 класс**

Ответы и решения задач

УСЛОВИЕ

1. Найдите 10 идущих подряд натуральных чисел, сумма всех цифр которых равняется 145.

Решение. Заметим, что у десяти подряд идущих натуральных чисел каждая цифра от 0 до 9 встречается в разряде единиц ровно по разу. Поэтому сумма их последних цифр всегда равна 45, и нам надо набрать сумму 100 за счёт остальных цифр. Это легко сделать, взяв все числа из одного десятка так, чтобы сумма всех цифр, кроме последней, у каждого из них равнялась 10. Именно так был получен ответ. Всего ответов бесконечно много, а данный выбран потому, что состоит из наименьших возможных чисел.

Ответ: все числа от 190 до 199.

УСЛОВИЕ

2. На день рождения Петя купил пирожные разных сортов. Если пирожное стоило N (N – целое число) рублей, то Петя покупал такое количество этих пирожных, которое отличается от N не более чем на 1. За все пирожные Петя заплатил 2017 рублей. Докажите, что среди купленных пирожных есть такие, которые стоят M рублей, и Петя купил их ровно M штук.

Доказательство. Предположим, что таких пирожных не нашлось. То есть, если пирожное стоило N рублей, то Петя покупал либо $N - 1$, либо $N + 1$ такое пирожное. Тогда за пирожные такого сорта Петя платил либо $N(N - 1)$ рублей, либо $N(N + 1)$ рублей. Но каждое из таких чисел является чётным (как произведение двух последовательных натуральных чисел). Значит, за пирожные каждого сорта Петя платил чётное число рублей. Но тогда и за все пирожные он заплатил бы чётное число рублей, а число 2017 нечётно. Противоречие.

УСЛОВИЕ

3. У продавца есть чашечные весы. Помогите продавцу придумать набор из 4 гирь, с помощью которых он сможет взвешивать на этих весах любое целое число килограммов от 1 до 12. При каждом взвешивании можно использовать не более двух гирь; гири можно ставить на разные чашки весов.

Решение. Подойдет, например, такой набор гирь: 1 кг, 2 кг, 5 кг и 10 кг. В таблице на рисунке показано, как ставить гири на чашки весов. (Предполагается, что взвешиваемый товар находится на левой чашке весов.)

Замечание. Предъявленный пример не единственный.

Масса товара	Левая чашка	Правая чашка
1		1
2		2
3		1 + 2
4	1	5
5		5
6		5 + 1
7		5 + 2
8	2	10
9	1	10
10		10
11		10 + 1
12		10 + 2

УСЛОВИЕ

4. Разрежьте равносторонний треугольник на 4 выпуклых многоугольника: треугольник, четырехугольник, пятиугольник и шестиугольник. (Многоугольник является выпуклым тогда и только тогда, когда любая его диагональ целиком лежит внутри него.)

Решение.



Ответ: смотри рисунок.

Примечание. Так как все многоугольники должны быть выпуклыми, никакие два из них не могут пересекаться иначе, чем по части стороны. Тогда среди сторон шестиугольника не более одной лежит на границе с каждой из трёх остальных фигур, поэтому остальные три его стороны должны лежать на сторонах исходного треугольника. Несложно убедиться, что единственный допустимый случай – это когда шестиугольник и исходный треугольник имеют два общих угла (и сторону между ними). Аналогично показывается, что пятиугольник имеет с исходным треугольником общий угол. Таким образом, не существует разрезов, принципиально отличающихся от приведённого. Разумеется, то, что данный треугольник правильный, не играет для решения никакой роли.

УСЛОВИЕ

5. У Миши и Маши в тетрадях было написано одно и то же многозначное целое число, оканчивающееся на 9876. Маша поставила плюс между третьей и четвёртой цифрами, считая справа, а Миша – между четвёртой и пятой, также считая справа. К удивлению школьников обе полученные суммы оказались одинаковы. Какое число было записано у школьников первоначально? Приведите все возможные варианты ответа и докажите, что других нет.

Решение. Пусть записанное число имеет вид $\overline{x9876}$, где x тоже некоторое натуральное число. Тогда у Миши получилась сумма $x + 9876$, а у Маши сумма $10x + 9 + 876$. Из равенства $x + 9876 = 10x + 9 + 876$ находим, что $x = 999$.

Ответ: 9999876 и другого числа нет.

УСЛОВИЕ

6. Студент Вася, живущий в 50 км от своего института, ездит на занятия на велосипеде и всегда подъезжает точно к началу занятий. Однако сегодня он проехал с запланированной скоростью только первые 10 км, а затем велосипед сломался, и Васе пришлось пойти пешком. Через некоторое время Васе повезло, и последние 24 км он ехал на попутной машине. Успел ли Вася к началу занятий, если скорость Васиной ходьбы была в 2,5 раза меньше скорости велосипеда, а скорость машины в 6 раз больше скорости велосипеда? Ответ обосновать.

Решение. Вася прошел пешком $50 - 10 - 24 = 16$ км. За время, затраченное на ходьбу, Вася на велосипеде проехал бы в 2,5 раза больше, т. е. $16 * 2,5 = 40$ км. Значит, занятия в институте начались как раз тогда, когда Васе удалось сесть на попутную машину. Вывод: Вася на занятия опоздал.

Ответ: нет, не успел.