8 класс

1. Какой цифрой заканчивается число $2^{2018}+3^{2017}$?

Решение: Последние цифры степеней 2 и 3 циклически повторяются через 4:

Степень n	Последняя цифра 2^n	Последняя цифра 3^n
1	2	3
2	4	9
3	8	7
4	6	1
5	2	3
6	4	9
…	…	…
$4k+1$	2	3
$4k+2$	4	9

В числе $2^{2018}+3^{2017} = 2^{4k+2} + 3^{4k+1}$, первое слагаемое заканчивается 4, второе – 3, а само число заканчивается цифрой 7.

Ответ: 7.

2. Можно ли увезти 50 камней, массы которых 370, 372, 374, …, 468 кг на семи грузовиках грузоподъёмностью три тонны каждый?

Решение: если увозить 50 камней на 7 грузовиках, то обязательно на одном из них должно быть 8 камней. Найдем массу 8 самых лёгких камней: 370 + 372 + 374 + 376 + 378 + 380 + 382 + 384 = 3016 кг. Это больше 3 тонн, не поместится. Следовательно, увезти 50 камней на 7 грузовиках нельзя.

Ответ: нельзя.

3. Можно ли число 2016 представить в виде разности квадратов двух целых чисел?

Решение: Если число $2016 = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$, то есть число 2016 представлено в виде произведения двух множителей. Причём, так как числа $x - y$ и $x + y$ являются числами одинаковой чётности, то и множители должны быть одинаковой чётности.

Рассмотрим какое-нибудь подходящее разложение, например $2016 = 2\cdot1008$, получим систему:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 1008 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 1010 \\ 2y = 1006 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 505 \\ y = 503 \end{cases}$$

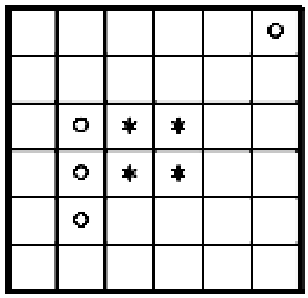
Итак, $2016 = 505^2 - 503^2$.

Аналогично можно получить разложения: $254^2 - 250^2$, $171^2 - 165^2$, $130^2 - 122^2$, $90^2 - 78^2$, $79^2 - 65^2$, $71^2 - 55^2$, $65^2 - 47^2$, $54^2 - 30^2$, $50^2 - 22^2$, $46^2 - 10^2$, $45^2 - 3^2$.

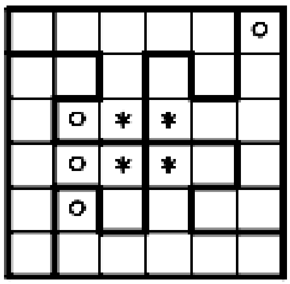
Ответ: можно.

Рекомендации: если приведено только разложение, то 0 баллов. Если приведённое в качестве разложения выражение проверено, то 1 балл. Если при изучении сомножителей не указана их одинаковая чётность, но доказано, что конкретное разложение не даёт целых x и y, а затем найдено подходящее разложение, то 7 баллов. Если найдено разложение с нецелыми x и y, то 2-3 балла.

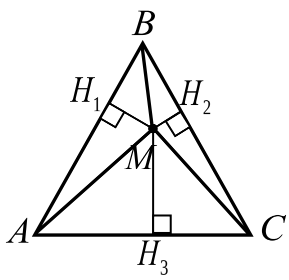
4. Разрежьте квадрат, изображённый на рисунке, по линиям сетки так, чтобы все части были одинакового размера и формы, и чтобы каждая содержала по одному кружку и звёздочке.



Решение:



5. Докажите, что для любой точки, лежащей внутри правильного треугольника, сумма расстояний до сторон этого треугольника есть величина постоянная.



Решение: Рассмотрим правильный треугольник ABC.

Возьмём внутри него произвольную точку M, расстояние от этой точки до стороны треугольника – длина перпендикуляра, опущенного на сторону. Обозначим основания этих перпендикуляров H_1, H_2, H_3.

Соединив точку M с вершинами треугольника ABC, мы разобьём его на 3 треугольника AMB, BMC, AMC.

$$S_{ABC} = S_{AMB} + S_{BMC} + S_{AMC} = \frac{1}{2} AB \cdot MH_1 + \frac{1}{2} BC \cdot MH_2 + \frac{1}{2} AC \cdot MH_3 =$$

$$= \frac{1}{2} a \cdot MH_1 + \frac{1}{2} a \cdot MH_2 + \frac{1}{2} a \cdot MH_3 = \frac{1}{2} a\left(MH_1 + MH_2 + MH_3\right).$$

Левая часть равенства есть фиксированное число, a – тоже постоянное для данного треугольника значение, следовательно, величина выражения в скобке есть величина постоянная. Но это выражение и есть сумма расстояний от точки M до сторон треугольника. Что и требовалось доказать.

Рекомендации: если доказано только в частном случае, например, если M – точка пересечения медиан, то 2 балла.