8-й класс

8.1 На острове $\frac{2}{3}$ всех мужчин женаты и $\frac{3}{5}$ всех женщин замужем. какая доля населения острова состоит в браке?

Решение: Пусть М − число мужчин на острове, Ж − число женщин. Число семей, если считать по мужьям, равно $\frac{2}{3}\text{М}$; с другой стороны, если считать по женам, число семей равно $\frac{3}{5}\text{Ж}$. Стало быть $\frac{2}{3}\text{М}=\frac{3}{5}\text{Ж}$, откуда $\text{Ж}=\frac{10}{9}\text{М}$. Общее число людей, состоящих в браке, равно $\frac{2}{3}\text{М}+\frac{3}{5}\text{Ж}=\frac{2}{3}\text{М}+\frac{2}{3}\text{М}=\frac{4}{3}\text{М}$. Общая же численность населения острова равна $\text{М}+\text{Ж}=\text{М}+\frac{10}{9}\text{М}=\frac{19}{9}\text{М}$. Поэтому доля населения, состоящего в браке, равна

$$\frac{\frac{4}{3}\text{М}}{\frac{19}{9}\text{М}}=\frac{4}{3}\cdot\frac{9}{19}=\frac{12}{19}.$$

8.2 В треугольнике одна сторона в три раза меньше суммы двух других. Докажите, что противолежащий ей угол − наименьший угол треугольника.

Решение: Достаточно доказать, что указанная сторона − наименьшая из сторон треугольника (против меньшей стороны лежит меньший угол). Пусть a − ее длина, b и c − длины других сторон. По условию $3a<b+c$. По неравенству треугольника $a+b>c$. Поэтому $3a<b+a+b$, откуда $a<b$. Аналогично $a<c$.

8.3 На клетчатой доске 10×20 несколько клеток покрашено в красный цвет. Костя разрезал доску по клеточкам на прямоугольники так, что в каждом оказалось 5 красных клеток. А Влад разрезал такую же доску на прямоугольники так, что в каждом оказалось 7 красных клеток. Докажите, что Дима не сможет разрезать такую же доску на прямоугольники так, что в каждом будет 6 красных клеток.

Решение: Обозначим через n общее число красных клеток. Если k − число Костиных прямоугольников, то $n=5k$. Значит, n делится на 5. Аналогично, n делится на 7. Если бы Костя смог разрезать доску на прямоугольники с 6 красными клетками, то n делилось бы еще на 6. Так как числа 5,6,7 попарно взаимно простые, то n делилось бы на их произведение $5\cdot 6\cdot 7=210$. Поэтому $n\geq 210$. Но в данной доске всего 200 клеток.

8.4 Бесконечная последовательность положительных чисел $a_1, a_2, a_3, ...$ образована по закону: $a_1 = 1, a_{n+1}^2 = a_n^2 + \frac{1}{a_n}$ при $n = 1,2,3,...$ Докажите, что последовательность $b_1, b_2, b_3, ...,$ где $b_n = a_{n+1} - a_n$. является убывающей, т.е. $b_1 > b_2 > b_3 > ...$

Решение: Ясно, что $a_{n+1} > a_n$. Имеем $a_{n+1}^2 - a_n^2 = \frac{1}{a_n}$,

$(a_{n+1} - a_n)(a_{n+1} + a_n) = \frac{1}{a_n}$,

$b_n = a_{n+1} - a_n = \frac{1}{a_n(a_{n+1} + a_n)} > \frac{1}{a_{n+1}(a_{n+2} + a_{n+1})} = b_{n+1}$, т.к. знаменатель второй дроби больше знаменателя первой дроби. Ч.т.д.

8.5 По кругу расставлены 10 железных гирек. Между каждыми соседними гирьками находится бронзовый шарик. Масса каждого шарика равна разности масс соседних с ним гирек. Докажите, что шарики можно разложить на две чаши весов так, чтобы весы уравновесились.

Решение: Пусть $a_1, a_2, ..., a_{10}$ − массы гирек по порядку при обходе по кругу (скажем, по часовой стрелке). Тогда массы шариков между ними равны $m_1 = |a_2 - a_1|$, $m_2 = |a_3 - a_2|, \ldots,$ $m_9 = |a_{10} - a_9|$, $m_{10} = |a_1 - a_{10}|$. Значит, $a_2 - a_1 = \pm m_1$ с некоторым знаком + или −, $a_3 - a_2 = \pm m_2$ с некоторым знаком + или −, $a_1 - a_{10} = \pm m_{10}$ с некоторым знаком + или −. Сумма чисел $(a_2 - a_1), (a_3 - a_2), ..., (a_{10} - a_9), (a_1 - a_{10})$ равна 0. Поэтому сумма $\pm m_1 \pm m_2 \pm ... \pm m_{10}$, где перед каждым слагаемым так выбран некоторый знак, как указано выше, равна 0. Следовательно, сумма тех слагаемых, перед которыми стоит знак +, равна сумме тех слагаемых, перед которыми стоит знак −. Это и дает требуемое разложение по чашам весов.