Решения задач муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников по математике 2017 год

8 класс

> ***Задача 1**. Красная Шапочка решила сходить к бабушке, домик которой находился в 1 км ходьбы от ее дома. Волк ей в тот день не попался, поэтому туда и обратно она шла по одному и тому же маршруту. На горизонтальных участках ее скорость была 4 км/ч, в гору – 3 км/ч, а с горы – 6 км/ч. Сколько времени она была в пути?*

Ответ. Полчаса.

Решение. Рассмотрим какой-нибудь наклонный участок пути длиной s. Проходя его в гору, Красная Шапочка потратит время s/3, под гору – s/6, всего -- $s\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)=\frac{s}{2}$. Значит, ее средняя скорость на этом участке составляет $2s{:}\frac{s}{2}=4$. Итак, средняя скорость на всех участках одинакова и равна 4 км/ч. Весь путь девочки составляет 2 км, так что она потратит на дорогу полчаса.

Критерии. За ответ без обоснования – 0 баллов, за решение на отдельных примерах – 1 балл. За полное обоснование 7 баллов.

> ***Задача 2**. Петя утверждает, что два спинера дороже пяти мороженых, Вася -- что три спинера дороже восьми мороженых. Известно, что прав из них только один. Верно ли, что 7 спинеров дороже 19 мороженых?*

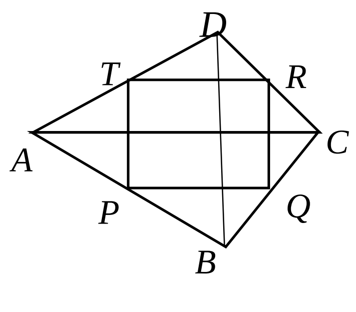
Ответ. Неверно.

Решение. Обозначим цену спинера через s, а мороженого – через m. Первое утверждение означает, что $s\ >\frac{5m}{2}=\frac{15m}{6}$, второе – что $s\ >\frac{8m}{3}=\frac{16m}{6}$. Если бы выполнялось второе условие, то выполнялось бы и первое, что противоречит условию. Значит, $s\leq\frac{8m}{3}$. Но тогда $7s\leq\frac{56m}{3}<19m$.

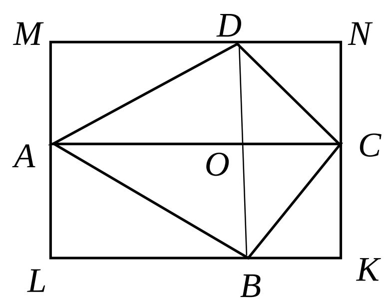
Критерии. За ответ без обоснования – 0 баллов, за решение на отдельных примерах – 0 баллов. За полное обоснование 7 баллов.

> ***Задача 3**. В выпуклом четырёхугольнике длины диагоналей 2 и 4 см. Найти площадь четырёхугольника, зная, что длины отрезков, соединяющих середины противоположных сторон, равны.*

Ответ. 4 см^2.



Решение. Отрезок, соединяющий середины смежных сторон четырехугольника параллелен его диагонали (как средняя линия соответствующего треугольника). Поэтому четырехугольник $PQRT$ – параллелограмм. По условию диагонали этого параллелограмма равны, так что он является прямоугольником. Но тогда и диагонали AC и BD, параллельные его сторонам, перпендикулярны между собой.



Проведем через вершины прямоугольника прямые, параллельные диагоналям. Получим описанный прямоугольник $KLMN$. Заметим, что треугольник AMD равен ADO, CDN – треугольнику CDO и т.д. Поэтому площадь $KLMN$ вдвое больше, чем площадь $ABCD$. Итак, искомая площадь составляет S = ½ ·2·4 = 4.

Замечание. Возможны и другие способы вычисления S, например, как удвоенной площади $PQRT$. Также можно использовать формулу $S = ½ AC\cdot BD\cdot \sin\alpha$, где α – угол между диагоналями.

Критерии. За разбор частного случая – 0 баллов. Доказательство того, что $SPQR$ – прямоугольник – 3 балла.

> ***Задача 4***. *Три прямые, пересекаясь, образуют 12 углов, причем* n *из них оказались равными. Каково может быть максимальное значение* n*?*

Ответ. 6.

Решение. Три прямые ограничивают некий треугольник. Если этот треугольник равносторонний, то из двенадцати углов шесть составляют 60°, а остальные шесть -- 120°.

Может ли какой-нибудь внешний угол треугольника быть равным его внутреннему углу? Он равен сумме несмежных с ним внутренних, так что он больше каждого из несмежных. Значит, равным он может быть только смежному с ним. Тогда каждый из них составляет 90°, таких углов 4 (у них общая вершина). Других прямых углов в этой конструкции нет. Но тогда другие внешние углы не равны внутренним. Равными могут быть только внутренние (и вертикальные к ним) или только внешние (и вертикальные к ним). Тогда равных углов каждого типа будет не более 4.

Критерии. За пример с шестью равными углами – 3 балла, за сравнение внешних и внутренних углов – 3 балла. За ответ без обоснования – 1 балл.

> ***Задача 5***. *Рассмотрим четыре последовательных числа* n, $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$. *Для каких* n *НОК первых трех чисел больше, чем НОК последних трех?*

Ответ. Любое нечетное число не меньшее 5.

Решение. Рассмотрим тройку чисел n, $n + 1$, $n + 2$. Каждые два соседних числа взаимно просты. Если числа n и $n + 2$ имеют общий делитель, то он является делителем их разности, 2. Итак, если число n нечетное, то все три числа n, $n + 1$, $n + 2$ попарно взаимно просты, так что НОК(n, $n + 1$, $n + 2$) = $n(n + 1)(n + 2)$. Если n четное, то НОК(n, $n + 1$, $n + 2$) = $n(n + 1)(n + 2)/2$. Ясно, НОК($n + 1$, $n + 2$, $n + 3$) может быть меньше НОК(n, $n + 1$, $n + 2$), только если n – нечетное. Неравенство принимает вид

$$n(n + 1)(n + 2) > \frac{(n + 1)(n + 2)(n + 3)}{2}$$

или после сокращения $2n > n + 3$. Окончательно $n > 3$, откуда в силу нечетности $n \geq 5$.

Критерии. За вычисление НОК для случая нечетных n – 2 балла, для случая четных -- 3 балла. За полное решение – 7 баллов. За отдельные примеры – 0 баллов.