Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике

2017/18 учебный год

8 класс

Ответы и решения задач

1. УСЛОВИЕ

По прогнозу экспертов цены на квартиры в Москве через год упадут в рублях на 20 %, а в евро – на 40 %. В Сочи через год цены на квартиры в рублях упадут на 10 %. На сколько упадут цены на квартиры в Сочи в евро? Предполагается, что курс евро по отношению к рублю (т. е. стоимость одного евро в рублях), один и тот же в Москве и в Сочи, однако он может меняться с течением времени. Ответ обосновать.

Решение. Рассмотрим равноценные по стоимости квартиры в Москве и в Сочи, пусть стоимость любой из них равна a рублей, что соответствует b евро. Через год стоимость квартиры в Москве станет равной 0,8 рублей, что равно $0{,}6b$ евро. Отсюда a рублям через год будет соответствовать $3b/4$ евро. В Сочи квартира станет стоить $0{,}9a$ рублей. Найдём её цену в евро. Так как в каждый момент времени отношение стоимости рубля к стоимости евро одно и то же для любого региона, то $0{,}9a = 2{,}7b/4 = 0{,}675b$. Значит, цена на квартиру в Сочи упадёт на $0{,}325b$ евро, т.е. на 32,5 %.

Ответ: на 32,5 %.

2. УСЛОВИЕ

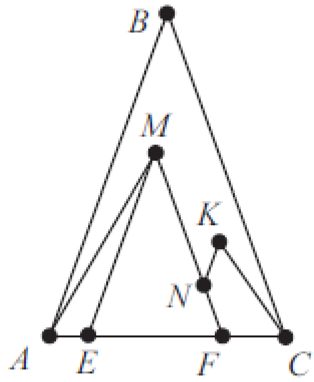
Про числа a, b, c известно, что $a^2 + bc = a(b + c)$, $b^2 + ac = b(a + c)$, $c^2 + ab = c(a + b)$. Докажите, что $a = b = c$.

Доказательство. Сложив первые два уравнения, получим $a^2 + b^2 = 2ab$, $(a - b)^2 = 0$ и, наконец, $a = b$. Аналогично доказывается, что $a = c$.

3. УСЛОВИЕ

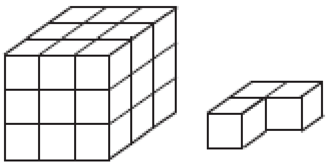
Внутри равнобедренного треугольника ($AB = BC$) отметили точки M, N и K (точка N – ближайшая к стороне AC) так, что $MN \parallel BC$, $NK \parallel AB$. Докажите, что $AM + KC > MN + NK$.

Решение. Продлим отрезок MN за точку N до пересечения со стороной AC в точке F, и проведём ME параллельно BA (точка E лежит на стороне AC – см. рисунок). В треугольнике AME угол AEM тупой, поэтому против него лежит наибольшая сторона треугольника. Тогда $AM > EM = MF > MN$. Аналогично $KC > NK$. Остаётся почленно сложить два последних неравенства.

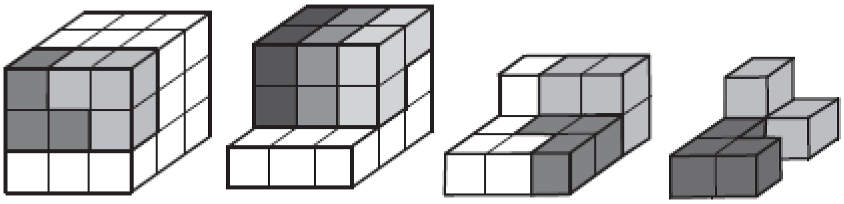


4. УСЛОВИЕ

Можно ли кубик 3 x 3 x 3 распилить на 9 уголков? Уголком называется фигура, состоящая из трех кубиков 1 x 1 x 1 – см. рисунок; в кубе уголок может располагаться параллельно любой из граней. Ответ обосновать.



Ответ: можно. Например так, как показано на рисунке (пример не единственный).



5. УСЛОВИЕ

При последовательном вычислении на калькуляторе суммы ста слагаемых: 20, 12 + 20, 12 + 20, 12 + … + 20, 12 Петя несколько раз ошибался, сдвигая при наборе в некоторых слагаемых запятую на один знак – в каких-то вправо, в каких-то влево. Мог ли его результат оказаться ровно вдвое больше правильного? Ответ обосновать. (Калькулятор Пети считает безошибочно.)

Решение. <u>Первый способ.</u> Пусть в x слагаемых Петя сдвинул запятую вправо, в y – влево, в z – не ошибся. Тогда $x + y + z = 100$ и, если ответ на вопрос задачи положителен, то $201,2x + 2,012y + 20,12z = 2012 \cdot 2$. Второе уравнение сводится к виду $100x + y + 10z = 2000$, вычитывая из него первое, получаем, что $99x + 9z = 1900$. Это уравнение не имеет решений в целых числах, поскольку его левая часть делится на 3 (или на 9), а правая – нет.

Второй способ. Будем все числа измерять в тысячных десятичных дробях. Каждое слагаемое (в тысячных) имеет остаток 1 при делении на 3. Этот остаток не меняется, как бы ни сдвигалась в числе запятая. Таким образом, у любого полученного Петей результата остаток при делении на 3 совпадает с остатком при делении верного ответа на 3. Последний остаток равен 1, поэтому у удвоенного правильного результата остаток при делении на 3 равен 2 и, значит, Петя его получить не мог.

Ответ: нет, не мог.

6. УСЛОВИЕ

В ряд слева направо было выставлено 13 гирек с массами 1г, 2г, 3г, …, 13г. Из них осталось только семь подряд стоящих (их порядок не поменялся), а остальные 6 гирек потеряны. Можно ли за два взвешивания на чашечных весах определить массы оставшихся гирек? Ответ обосновать. Различить гирьки иначе, чем взвешивая их на весах, невозможно.

Решение. Пусть вес самой левой из оставшихся гирь равен x. Достаточно определить, чему равен x. Первым взвешиванием сравним три самые левые гири и две следующие за ними. Если веса равны, то имеем $x + x + 1 + x + 2 = x + 3 + x + 4$, т. е. $x = 4$ и всё установлено. Пусть три гири перевесили. Тогда $x < 4$. Вторым взвешиванием сравниваем три средние гири и две более тяжёлые. ($3x + 9$ и $2x + 11$ на чашках весов). Если весы в равновесии, то $x = 2$, если перевесили три гири, то $x = 3$, если две, то $x = 1$. Наконец, пусть при первом взвешивании перевесили две гири. Тогда $x > 4$. Вторым взвешиванием сравниваем вес трёх самых левых и вес самой правой и самой средней гири ($3x + 3$ и $2x + 9$). Равенство весов говорит, что $x = 6$, перевесила чашка с тремя гирями, значит, $x = 7$, иначе $x = 5$.

Ответ: можно.