ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
2017-2018 УЧЕБНЫЙ ГОД

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

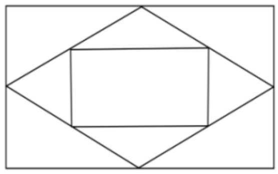
9 КЛАСС

Общее количество баллов **35. Решение каждой задачи оценивается Жюри из 7 баллов** в соответствии с критериями и методикой оценки, разработанной центральной предметно-методической комиссией:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения.
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако решение содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3-4	Верно рассмотрен один из существенных случаев.
2	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии правильного решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

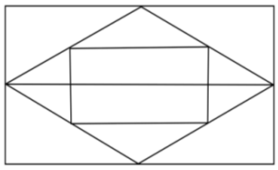
Указания к оцениванию отдельных задач содержатся в комментариях к решениям.

1. Середины соседних сторон прямоугольника с периметром 32 соединили отрезками. С полученным четырёхугольником проделали ту же операцию: середины соседних сторон соединили отрезками (см. рисунок). Сколько всего раз надо сделать такую операцию, чтобы периметр полученного четырёхугольника впервые стал бы меньше 1?



Ответ. 11.

Решение. После двух операций получается четырёхугольник, стороны которого являются средними линиями треугольников с основаниями, параллельными сторонам исходного прямоугольника. Поэтому этот четырёхугольник является прямоугольником, причем каждая его сторона в 2 раза меньше соответствующей стороны исходного прямоугольника. Таким образом, за 2 операции периметр уменьшается вдвое. После 5 пар операций периметр уменьшится в $2^5 = 32$ раз и станет равным 1. Из неравенства треугольника очевидно, что периметр уменьшается при каждой операции. Поэтому после 11 операций периметр станет меньше 1.



Комментарий. *Рассмотрен частный случай (например, вычисления произведены для прямоугольника со сторонами, заданными конкретными числами), но метод вычислений может быть применен к произвольному прямоугольнику – 4 балла; метод применим только к прямоугольникам определенного вида – 1-2 балла. Если при подсчёте числа операций не учли первые две, снять 1 балл. Если не доказано, что периметр уменьшается при каждой операции, снять 1 балл.*

2. Вася расставляет натуральные числа от 1 до 10 в произведение $a^b b^c c^d d^e e^f f^g g^k k^l l^m m^a$ (одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, разными буквами – разные цифры). На какую наибольшую степень двойки может делиться это произведение?

Ответ: 2^{69}.

Решение. Понятно, что в наибольшей возможной степени (10) должна стоять цифра $8 = 2^3$. В степени 9 должна стоять только $4 = 2^2$, остальные чётные цифры должны стоять в степенях 8, 7 и 6. Тогда произведение будет делиться на степень двойки, равную $3 \cdot 10 + 2 \cdot 9 + 8 + 7 + 6 = 69$. В то же время такой вариант вполне возможен, пример $2^8 \cdot 8^{10} \cdot 10^6 \cdot 6^7 \cdot 7^4 \cdot 4^9 \cdot 9^1 \cdot 1^3 \cdot 3^5 \cdot 5^2$.

Комментарий. Определено, что в наибольшей возможной степени должна стоять цифра 8 – 1 балл. Определены показатели степени у 8, 4, 2, 6, 10 – 4 балла. Найден и обоснован верный ответ о степени двойки – 5 баллов. Приведен пример числа – еще 2 балла.

3. Прямая l пересекает график функции $y=\frac{k}{x}$ $(k\neq 0)$ в точках с абсциссами x_1 и x_2, а ось абсцисс – в точке с абсциссой x_3. Докажите, что $x_1+x_2=x_3$.

Решение. Прямая, очевидно, не вертикальная, так как иначе она пересекла бы гиперболу только в одной точке. Пусть уравнение прямой $y=tx+b$. Тогда $0=tx_3+b$, откуда $b=-tx_3$ и уравнение прямой имеет вид $y=tx-tx_3$. Чтобы найти координаты точек пересечения прямой и заданной гиперболы достаточно решить систему $\begin{cases} y=\frac{k}{x}, \\ y=tx-tx_3. \end{cases}$ Подставим значение из первого уравнения системы во второе. Второе уравнение примет вид $\frac{k}{x}=tx-tx_3$ или $tx^2-tx_3x-k=0$. Полученное квадратное уравнение должно иметь два корня x_1 и x_2. По теореме Виета $x_1+x_2=-\frac{-tx_3}{t}=x_3$.

Комментарий. *Составлена система – 2 балла. Получено квадратное уравнение – 4 балла. Полное решение – 7 баллов. При отсутствии решения за полезные идеи и продвижения – 2 балла. Если не оговорен случай вертикальной прямой, баллы не снимать.*

4. В одну из вершин шестиугольника Скрудж МакДак положил золотую монетку, а в остальных вершинах ничего нет. Каждый день он убирает с одной из вершин шестиугольника произвольное количество монеток и тут же кладёт на соседнюю вершину в шесть раз больше монеток. Если в какой-то день Скрудж МакДак сможет добиться того, что во всех вершинах шестиугольника одинаковое число монеток, то ему будет присвоено звание «Великий Селезень». Сможет ли Скрудж МакДак получить это звание?

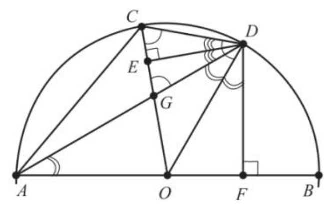
Ответ. Не сможет.

Решение. Занумеруем вершины шестиугольника, начиная с той, где лежит монетка, последовательными натуральными числами от 1 до 6 (двигаясь, например, против часовой стрелки). Обозначим через $n_1,\ n_2,\dots,n_6$ – количества монеток, лежащих в вершинах $1,2,\dots,6$ соответственно. Пусть $N_1=n_1+n_3+n_5$, $N_2=n_2+n_4+n_6$. Рассмотрим разность N_1-N_2 и докажем, что при указанных действиях Скруджа МакДака остаток от ее деления на 7 не изменяется. Действительно, если из какой-то вершины шестиугольника Скрудж МакДак забирает x монеток, а в соседнюю вершину добавляет $6x$ монеток, то значение N_1-N_2 изменяется на $7x$. Заметим, что в начальный момент $N_1-N_2=1$. Поэтому цель Скруджа МакДака – уравнять количество монеток во всех вершинах, а значит сделать так, чтобы N_1-N_2 было равно нулю, – недостижима.

Комментарий. *Ответ без обоснования – 0 баллов. Верно найден инвариант (в данном решении это N_1-N_2), но решение не доведено до конца – 5 баллов. Полное обоснованное решение – 7 баллов.*

5. Полуокружность с диаметром AB и центром в точке O разделена точками C и D на три части так, что точка C лежит на дуге AD. Из точки D на отрезки OC и AB опущены перпендикуляры DE и DF соответственно. Оказалось, что DE – биссектриса треугольника ADC, а DO – биссектриса треугольника ADF. Найдите угол CAD.

Ответ: 20°.



Решение. Треугольник AOD равнобедренный ($OD=OA$, как радиусы), значит, $\angle OAD=\angle ODA$. Поскольку DO – биссектриса угла ADF, то $\angle OAD=\angle ODF$. Подсчёт углов в прямоугольном треугольнике AFD показывает, что $\angle OAD=30^\circ$. Обозначим за G точку пересечения отрезков AD и OC. Отрезок DE является высотой и биссектрисой в треугольнике DGC; тогда этот треугольник равнобедренный с углом ECD при основании. Треугольник OCD также является равнобедренным с углом ECD при основании, следовательно, углы при вершинах этих двух треугольников также будут равны, т. е. $\angle CDG=\angle COD$. Пусть $\angle CDG=\angle COD=a$, тогда $\angle GCD=\angle ODC=30^\circ+a$. Подсчитав сумму углов треугольника COD, получим, что $a=40^\circ$. Искомый угол CAD вписанный и опирается на ту же дугу, что и центральный угол DOC, поэтому $\angle CAD=20°$.

Комментарий. *Приведено полное обоснованное решение – 7 баллов. Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности – до 5 баллов. Найдено только значение ∠OAD – 2 балла.*