Муниципальный этап Российской олимпиады по математике 2017-18 учебного года
9 класс *(Время решения – 4 часа)*

1. Числа a, b и $\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}$ рациональные ($a \geqslant 0$). Докажите, что $\sqrt[3]{b}$ рационально.

   Решение. Пусть $\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}=r$, тогда $\sqrt[3]{b}=r-\sqrt{a}$, после возведения в куб получим $b=r^3-3r^2\sqrt{a}+3ra-a\sqrt{a}$, $(a+3r^2)\sqrt{a}=r^3+3ra-b$. Если число $a+3r^2$ равно нулю, то $a=0$ и $r=0$, значит $b=0$, $\sqrt[3]{b}$ рационально. В остальных случаях $a+3r^2>0$, значит $\sqrt{a}=\frac{r^3+3ra-b}{a+3r^2}$. Числитель и знаменатель дроби в правой части последнего равенства рациональны, значит $\sqrt{a}$ рационально, отсюда $\sqrt[3]{b}=r-\sqrt{a}$ рационально, как разность двух рациональных.

   Комментарий. Не рассмотрен случай, когда $a+3r^2=0$, но в остальном решение верно — 6 баллов.

2. Есть 7 неотличимых на вид гирь. Борис знает массу каждой гири, а Аркадий знает лишь, что данный набор гирь содержит все целые массы от 1 до 7 граммов. Как при помощи не более чем трёх взвешиваний на чашечных весах Борис может подтвердить для Аркадия вес каждой гири?

   Решение. Будем обозначать через a_m гирю с массой m, и саму эту массу. Борис может провести, например, три следующих взвешивания: $a_1+a_2+a_3<a_7$, $a_2+a_3>a_4$, $a_1+a_6>a_2+a_4$.

   Докажем, что этих взвешиваний хватит. Суммарная масса трёх гирь не меньше $1+2+3=6$, поэтому продемонстрированное Борисом неравенство $a_1+a_2+a_3<a_7$ будет означать, что $a_7=7$, и $\{a_1,a_2,a_3\}=\{1,2,3\}$ (но мы не знаем, какая из гирь a_1, a_2 и a_3 отвечает массам 1, 2 и 3). Суммарная масса двух гирь из набора $\{1,2,3\}$ не больше $2+3=5$, и так как $a_4\geqslant 4$, то второе взвешивание подтверждает, что $a_4=4$, $a_1=1$.

   Осталось различить гири a_2 и a_3, a_5 и a_6. a_1+a_6 не больше $1+6=7$, a_2+a_4 не меньше $2+4=6$. Последнее взвешивание подтверждает, что $a_1+a_6=7$ и $a_2+a_4=6$, значит подтверждает, что $a_6=6$ и $a_2=2$.

   Замечание 1. Возможны другие варианты взвешиваний.

   Замечание 2. Правильное решение должно содержать не только схему взвешиваний, но и объяснение, почему из результатов взвешиваний можно восстановить массы гирь.

   Комментарий. Правильно указана схема взвешиваний — 2 балла.

   Доказано, что из неравенства $a_1+a_2+a_3<a_7$ (или из равенства $a_1+a_2+a_3=a_6$) следует $\{a_1,a_2,a_3\}=\{1,2,3\}$ и $a_7=7$ ($\{a_1,a_2,a_3\}=\{1,2,3\}$ и $a_6=6$) — 2 балла.

   Баллы по этим двум пунктам складываются.

3. Каждое натуральное число покрашено либо в синий, либо в красный цвет. При любой ли раскраске найдутся три различных одноцветных натуральных числа x, y и z таких, что $xy=z^2$?

   Ответ. Да.

   Решение. Предположим, что найдётся раскраска при которой таких чисел нет и придём к противоречию. Посмотрим, как раскрашены чётные степени двойки. Если начиная с 2^2 они раскрашены попеременно, то можно взять одноцветную тройку $x=2^2$, $y=2^{10}$, $z=2^6$. Значит найдутся одноцветные числа 2^{2t} и 2^{2t+2} ($t\geqslant 1$), пусть они покрашены в синий цвет. Тогда числа 2^{2t+4} и 2^{2t-2} красные, но значит, в зависимости от цвета 2^{2t+1}, либо тройка $x = 2^{2t}$, $y = 2^{2t+2}$, $z = 2^{2t+1}$, либо тройка $x = 2^{2t-2}$, $y = 2^{2t+4}$, $z = 2^{2t+1}$ одноцветна.

Комментарий. Рассматриваются раскраски степеней одного и того же числа — 2 балла.

4. В невыпуклом четырёхугольнике $ABCD$ каждый из углов B, C и D равен $30°$ (угол при вершине A больше развёрнутого). Точки N и T — середины сторон BC и CD соответственно. Докажите, что треугольник ANT правильный.

Первое решение. Пусть прямая AB пересекает CD в точке E, прямая AD пересекает BC в точке F. $\angle CEB = 180° - \angle ECB - \angle CBE = 120°$, аналогично $\angle CFD = 120°$, значит $\angle EAF = 360° - 2 \cdot 120° - 30° = 90°$. Треугольники CBE и CDF равнобедренные, значит их медианы EN и FT являются и высотами. Углы BNE, CTF и FAE равны $90°$, значит точки N, F, A, T и E лежат на одной окружности (с диаметром EF). Отсюда $\angle NTA = \angle NEA = 60°$, $\angle TNA = \angle TFA = 60°$, значит треугольник ANT правильный.

Второе решение. Сумма углов четырёхугольника равна $360°$, значит угол A равен $360° - 3 \cdot 30° = 270°$, и прямые AB и AD перпендикулярны. Введём прямоугольную систему координат так, чтобы ось Ox совпадала с прямой AB, ось Oy совпадала с прямой AD, при этом положительное направление оси Ox было сонаправлено вектору $\overrightarrow{AB}$, положительное направление оси Oy было сонаправлено вектору $\overrightarrow{AD}$.

Пусть координаты точки B — $(t, 0)$, координаты точки D — $(0, s)$. Так как $\angle ABC = 30°$ и $\angle CDA = 30°$, то $y = \frac{1}{\sqrt{3}}(x - t)$ есть уравнение прямой CB, $y = \sqrt{3}x + s$ — уравнение прямой CD. Абсцисса точки пересечения этих двух прямых удовлетворяет соотношению $\frac{1}{\sqrt{3}}(x-t) = \sqrt{3}x+s$, $x = \frac{-t-\sqrt{3}s}{2}$, значит её ордината $y = \frac{-s-\sqrt{3}t}{2}$. Итак, координаты точки C — $\left(\frac{-t-\sqrt{3}s}{2}, \frac{-s-\sqrt{3}t}{2}\right)$. Так как точки N и T суть середины сторон CB и CD, то координаты N — $\left(\frac{t-\sqrt{3}s}{4}, \frac{-s-\sqrt{3}t}{4}\right)$, координаты T — $\left(\frac{-t-\sqrt{3}s}{4}, \frac{s-\sqrt{3}t}{4}\right)$. Отсюда $\overrightarrow{TN} = \left(\frac{t}{2}, -\frac{s}{2}\right)$, и осталось заметить, что $AN^2 = AT^2 = TN^2 = \frac{1}{4}(t^2 + s^2)$, значит треугольник ANT правильный.

Замечание. Возможны два различных варианта взаимного расположения точек T, E, F и N, в зависимости от того, является ли четырёхугольник $TEFN$ выпуклым или нет. Если решение является правильным для одного из этих вариантов, но требует модификаций для другого, решение всё равно считается верным.

Комментарий. Доказано только, что углы BNE и CTF прямые — 1 балл.

Доказано, что углы BNE и CTF прямые и точки N, F, A, T и E лежат на одной окружности — 3 балла.

Координаты точки C выражены через координаты точек B и D, либо координаты точек B и D выражены через координаты точки C — 3 балла.

Баллы по разным пунктам не складываются.

5. В квадрате со стороной 7 лежат 170 квадратов со стороной 1 так, что стороны маленьких квадратов параллельны сторонам большого. Докажите, что центр хотя бы одного из квадратов со стороной 1 лежит строго внутри другого квадрата со стороной 1 (точка лежит строго внутри квадрата, если точка принадлежит квадрату и не лежит на его границе).

Решение. Допустим, что утверждение задачи неверно и придём к противоречию. Обсудим сначала, как интерпретировать взаимное расположение двух квадратов со стороной $2a$, если центр второго не лежит строго внутри первого. Итак, пусть у нас есть квадрат A с центром O и квадрат B с центром F. Поместим точку O в начало координат, оси направим параллельно сторонам A. Хотя бы одна из координат F по модулю не меньше a, ведь иначе F лежит в пересечении полос $|x| < a$ и $|y| < a$, то есть строго внутри A. Будем считать, что оси проведены так, что абсцисса F (обозначим её t) не меньше a (про модуль тоже можно забыть, выбрав нужное направление). Если заменить A и B на квадраты с теми же центрами, тем же направлением сторон, но с длинами сторон равными a, то полученные квадраты A' и B' не будут иметь общих внутренних точек. Действительно, A' будет лежать в полосе $|x| \leqslant \frac{a}{2}$, B' будет лежать в полосе $|x - t| \leqslant \frac{a}{2}$. Так как для абсцисс точек второй полосы $x - t \geqslant -\frac{a}{2}$, $x \geqslant t - \frac{a}{2}$, $x \geqslant \frac{a}{2}$, то полосы не имеют общих внутренних точек.

Заменим каждый из 170 квадратов со стороной 1 на квадрат с тем же центром, тем же направлением сторон, и стороной равной $\frac{1}{2}$. Из предыдущего абзаца следует, что у этих квадратов не будет общих внутренних точек и понятно, что они лежат внутри квадрата со стороной $6\frac{1}{2}$ (так как центры исходных квадратов удалены от края на расстояние не меньше $\frac{1}{2}$, после сжатия уже их стороны будут удалены от края на расстояние не меньше $\frac{1}{4}$). Значит их суммарная площадь не больше площади квадрата со стороной $6\frac{1}{2}$, но $170 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{170}{4} > \frac{169}{4} = 6\frac{1}{2} \cdot 6\frac{1}{2}$. Полученное противоречие говорит о том, что исходное предположение неверно, значит центр хотя бы одного из квадратов со стороной 1 лежит строго внутри другого квадрата со стороной 1.

Комментарий. Доказано, что если центр одного из квадратов со стороной 1 не лежит строго внутри другого квадрата со стороной 1, то либо разность абсцисс, либо разность ординат их центров по модулю не меньше $\frac{1}{2}$ — 2 балла.