МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП 2016-2017 уч. год
9 класс
(4 часа)

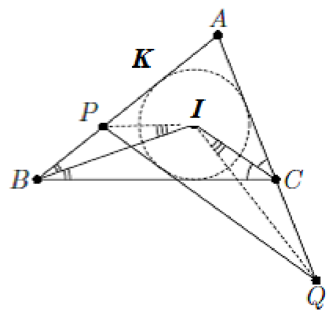
1. Чайку кормят с плывущего катера. Вниз бросают кусок хлеба, чайка за 3 секунды поднимает кусок с поверхности моря, а затем за 12 секунд догоняет катер. Войдя в залив, катер уменьшил скорость в два раза. Какое время теперь потребуется чайке, чтобы догнать катер, после того как она поднимет кусок хлеба?
   Ответ: 2 секунды.
   Решение. Пусть скорость чайки относительно катера x (м/с). Тогда за 12 секунд она пролетает $12x$ (м). А катер проплывает это расстояние за 3 секунды, то есть его скорость $4x$ (м/с), а скорость чайки $5x$ (м/с). В заливе скорость катера стала $2x$ (м/с). За 3 секунды он проходит $6x$ (м). Скорость чайки относительно катера теперь стала $5x$-$2x$=$3x$ (м/с). Значит, ей хватит 2 секунд, чтобы догнать катер.
   Критерии. *Если неверное решение – 0 баллов.*
   Только верный ответ – 0 баллов.
   Если верный ход рассуждений и есть вычислительная ошибка – 3 балла.
   Если верное решение – 7 баллов.

2. Все натуральные числа раскрашены в два цвета: красный и синий.
   Известно, что если число A красное, то и число A + 6 тоже красное, а если число B синее, то и число B + 15 тоже синее. Может ли среди первых 2017 чисел быть ровно 1000 красных?
   Ответ: Нет.
   Решение. Докажем, что числа C и C + 3 всегда одного цвета при любом значении C. Предположим для этого, что число C — красное, а C + 3 — синее. Тогда с одной стороны, число C + 18 = (C + 3) + 15 должно быть синим, а с другой стороны, это же число C + 18 = ((C + 6) + 6) + 6 должно быть красным. Если же предположить, что число C — синее, а C + 3 — красное, то число C + 15 = ((C + 3) + 6) + 6 должно быть одновременно и синим и красным. Полученное в обоих случаях противоречие доказывает, что числа C и C + 3 всегда принадлежат одному классу. Из этого следует, что любой класс вычетов по модулю 3 является либо целиком красным, либо целиком синим.
   Среди первых 2017 чисел каждый такой класс содержит 672 или 673 числа. Любой класс содержит меньше 1000 чисел, а любые два класса — больше 1000 чисел. Поэтому ровно 1000 красных чисел быть не может.

   Критерии. *Если неверное решение – 0 баллов.*
   Только верный ответ – 0 баллов.
   Если верный ход рассуждений и есть вычислительная ошибка – 3 балла.
   Если верное решение – 7 баллов.

3. На столе лежат 2017 монет. Двое играют в следующую игру: ходят по очереди; за ход первый может взять со стола любое нечетное число монет от 1 до 49, второй – любое четное число монет от 2 до 50. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?
Ответ: Первый игрок.
Решение. Опишем стратегию первого игрока. Первым ходом он должен взять со стола 27 монет. Каждым следующим, если второй игрок берет x монет, то первый игрок должен взять $51 - x$ монет (он всегда может это сделать, потому что если x – четное число от 2 до 50, то $(51 - x)$ – нечетное число от 1 до 49). Так как $2017 = 51 \times 39 + 27 + 1$, то через 39 таких «ответов» после хода первого на столе останется 1 монета, и второй не сможет сделать ход, т. е. проиграет.
Критерии. *Если неверное решение – 0 баллов.*
Только верный ответ – 0 баллов.
Если верная стратегия только описана, но не доказано, что она приводит к победе – 3 балла.
Если верное решение – 7 баллов.

4. В треугольник ABC вписана окружность с центром I, которая касается стороны AB в точке K. На отрезке BK выбрана точка P таким образом, что касательная к окружности, проведённая из этой точки, пересекает продолжение стороны AC за точку C в точке Q.
Докажите, что $\angle BIP = \angle CIQ$.



Решение. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла. Применяя теорему о внешнем угле треугольника для треугольника BIP, получим: $\angle BIP = \angle API - \angle ABI = \frac{1}{2}\angle APQ - \frac{1}{2}\angle ABC$ (1). Аналогично, для треугольника CIQ: $\angle CIQ = \angle ACI - \angle AQI = \frac{1}{2}\angle ACB - \frac{1}{2}\angle AQP$ (2). Осталось заметить, что $\frac{1}{2}\angle APQ - \frac{1}{2}\angle ABC = \frac{1}{2}\angle ACB - \frac{1}{2}\angle AQP$, так как это равносильно
$\angle APQ + \angle AQP = \angle ACB + \angle ABC = 180° - \angle BAC$.
Критерии. *Если неверное решение – 0 баллов.*
Если верный ход рассуждений и получены формулы (1) и (2) – 3 балла.
Если верное решение – 7 баллов.

5. В турнире участвовало 49 шахматистов. В некоторый момент турнира было сыграно 83 партии, причём каждый участник сыграл либо три, либо четыре партии (и никто не играл друг с другом дважды). Могло ли оказаться так, что никакие два шахматиста, сыгравшие по три партии, не играли между собой?

   Ответ: Нет.

   Решение. Пусть к данному моменту x шахматистов сыграло по три партии, тогда $49–x$ сыграло по четыре. В каждой партии участвует два шахматиста, следовательно, всего было сыграно $(3x+4(49–x)):2=83$ партии. Отсюда $x=30$. Предположим, что шахматисты, сыгравшие по три партии, не играли между собой. Тогда все партии они провели с теми, кто сыграл по четыре партии. Таких игр будет $3\times30=90>83$ – противоречие.

   Критерии. *Если неверное решение – 0 баллов.*
   Если верный ход рассуждений и есть вычислительная ошибка – 3 балла.
   Если верно найдено только количество участников сыгравших по три (четыре) партии – 3 балла.
   Если верное решение – 7 баллов.