Общие положения

1) Максимальная оценка за каждую задачу — 7 баллов.

2) 7 баллов ставится за безукоризненное решение задач; 6 баллов означает, что в решении допущена мелкая погрешность, например, не разобран частный случай, не влияющий на решение. 4 или 5 баллов означают, что все идеи, необходимые для решения найдены, задачу в целом надо считать решённой, однако приведённое решение имеет существенные недостатки, например, в доказательстве ключевого факта имеются пробелы, устранимые не совсем очевидным образом. 2 — 3 балла ставится, если в решении задачи имеется серъёзное продвижение, однако для решения необходимы дополнительные идеи, не указанные в решении. 1 балл означает, что в решении имеется только очень мелкое продвижение, как то: замечен, но не доказан ключевой факт, разобран нетривиальный частный случай или приведён (но не обоснован) верный ответ, который не вполне тривиален. Если приведённые в решении факты, идеи, выкладки к решению явным образом не ведут, то задача оценивается в 0 баллов, также как и в случае, когда решение задачи отсутствует.

3) В случае наличия в одной работе нескольких решений оценивается ровно одно решение, то, которое приносит больше баллов. За другие решения баллы не снимаются и не начисляются.

4) Оценка за задачу не может быть снижена за неаккуратный почерк, ошибки в русском языке, или явные описки в выкладках. Также недопустимо снижение баллов за не чёткий чертёж в геометрической задаче или даже за отсутствие такового. Нельзя требовать с участника олимпиады, чтобы он переписывал условие задачи, в том числе не обязательна краткая запись условия геометрических задач.

5) Школьник имеет право сам выбрать способ решения той или иной задачи; не допускается снижать оценку за то, что выбранный школьником способ решения не самый лучший или отличается от предложенных нами способов.

6) Факты и теоремы школьной программы (в том числе и те, которые приведены только в задачах школьных учебников) следует принимать без доказательств. Школьник имеет право без доказательства использовать любые такие факты, даже если они проходятся в более старших классах. Допускается (также без доказательств) использование математических фактов, изучающихся на факультативах. В частности, без ограничения можно применять формулы аналитической геометрии, математического анализа, принцип математической индукции, теоремы теории графов и т.п.

7) Критерии оценки, приведённые в прилагаемых решениях (таблица в конце решения каждой задачи) являются обязательными и не могут быть изменены. Однако это не означает, что выставляемые за задачу баллы обязательно должны совпасть с приведёнными в таблице: в случае, когда жюри вырабатывает дополнительные критерии (см. следующий пункт) жюри может выставить балл, которого в таблице нет (например, в таблице предусмотрены только 0 и 7 баллов, а

жюри выставляет 5 баллов). Таблицы критериев составлены таким образом, что перечисляют отдельные случаи; накопление баллов за разные пункты не предусмотрено.

8) В случае, если решение школьника принципиально отличается от решений, предложенных программным комитетом, и не может быть подведено под предлагаемые критерии, проверяющие вырабатывают критерии самостоятельно в соответствии с пунктом 2.

9) В случае возникновения спорных ситуаций при проверке работ олимпиады жюри вправе обратиться за разъяснениями и советом к составителям пакета заданий, т.е. к д.ф-м.н. Валерию Трифоновичу Шевалдину (адрес эл. почты **valerii.shevaldin@imm.uran.ru**) и к.ф-м.н. наук Сергею Эрнестовичу Нохрину (адрес эл.почты **varyag2@mail.ru**, тел. +**79220350324**). Мы ответим на все Ваши вопросы.

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2017 – 2018 учебном году 9 класс

Время выполнения заданий — 4 часа

9.1. *На доске выписаны числа* $\sqrt{2}$ *и* $\sqrt{5}$. *Разрешается дописать на доске сумму, разность или произведение любых двух различных чисел, уже выписанных на доске. Докажите, что можно выписать на доске число* 1.

Решение: Проще всего привести последовательность выписываемых чисел, которая приведёт к числу 1. Годится, например, такая:

$$\sqrt{2}+\sqrt{5},\quad 2\sqrt{2}+\sqrt{5},\quad 3\sqrt{2}+\sqrt{5},\quad \sqrt{2}-\sqrt{5},\quad 2\sqrt{2}-\sqrt{5},\quad 3\sqrt{2}-\sqrt{5},$$
$$(\sqrt{2}+\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{5})=-3,\quad (3\sqrt{2}+\sqrt{5})(3\sqrt{2}-\sqrt{5})=13,$$
$$13-3=10,\quad 10-3=7,\quad 7-3=4,\quad 4-3=1.$$

Примечание: Последовательность операций не единственно возможная.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верная последовательность выписанных чисел	7 баллов
Верной последовательности нет, но найден способ получения целого числа	3 балла
Примеры последовательностей, не ведущие к ответу или примеры невозможных последовательностей	0 баллов

9.2. *Существуют ли*

а) такие различные натуральные числа a, b, c *и* d, *что* $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}$;

б) такие различные натуральные числа a, b, c, d *и* e, *что* $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{e}$?

Ответ обоснуйте.

Решение: а) Например, $a=12$, $b=3$, $c=6$ и $d=4$ $\left(\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{12}=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{4}\right)$ или $a=56$, $b=7$, $c=28$ и $d=8$ $\left(\dfrac{1}{56}+\dfrac{1}{7}=\dfrac{9}{56}=\dfrac{1}{28}+\dfrac{1}{8}\right)$.

б) Например, $a=24$, $b=3$, $c=12$, $d=8$, $e=6$ $\left(\dfrac{1}{24}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{3}{8}=\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{8}\right)$ или $a=30$, $b=6$, $c=20$, $d=15$, $e=12$ $\left(\dfrac{1}{30}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{20}+\dfrac{1}{15}+\dfrac{1}{12}\right)$.

Примечание: Конструкция примера в пункте а) может быть получена из соображения, что в арифметической прогрессии из четырёх членов сумма двух внутренних равна сумме двух внешних, поэтому достаточно найти четыре дроби вида $1/n$, образующие арифметическую прогрессию. Но это соображение не помогает при решении пункта б). Для обоих пунктов «работает» следующая конструкция: выбираем нужное количество различных натуральных чисел, так чтобы сумма нескольких из них равнялась сумме остальных, а затем делим эти числа на какое-нибудь их общее кратное. Знаменатели получившихся после сокращения дробей (а в числителе у каждой такой дроби будет 1) и дают необходимый набор чисел.

Ответ: а), б) существуют.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верное решение обоих пунктов а) и б) (ПРОВЕРКА ТОГО, ЧТО ПРИВЕДЁННЫЕ В ПРИМЕРАХ ЧИСЛА ДЕЙСТВИТЕЛЬНО УДОВЛЕТВОРЯЮТ УСЛОВИЮ, ОТ ШКОЛЬНИКОВ НЕ ТРЕБУЕТСЯ!)	7 баллов
Верно решён только пункт б)	4 балла
Верно решён только пункт а)	3 балла
Ответ без обоснования	0 баллов

9.3. *На прямую дорогу между псом в будке и котом положили килограмм сосисок, и животные одновременно бросились к ним. Кот бегает вдвое быстрее пса, зато ест в два раза медленнее. Добежав до сосисок, оба ели без драки и съели поровну. Известно, что кот мог бы за одно и то же время съесть все сосиски или добежать от места старта до будки пса.*

а) К кому сосиски положили ближе?

б) Во сколько раз путь одного животного больше пути другого?

Ответы обоснуйте.

Решение:

Способ 1. Пока пёс ел свою половину сосисок, кот съел вдвое меньше, то есть четверть всех положенных сосисок. Остальные сосиски (в количестве $1/2-1/4=1/4$) кот ел, пока пёс до сосисок ещё не добежал. За это время кот мог бы пробежать четверть расстояния от места своего старта до будки пса, значит, пёс пробежал $1/8$ этого расстояния. Остальное расстояние ($7/8$ начальной дистанции) пёс и кот бежали вместе и пробежали одновременно. При этом кот, бегая вдвое быстрее, покрыл $2/3$ этого пути, то есть $7/12$ всего расстояния от места старта кота до будки пса, а остальную часть ($5/12$ всей дистанции) пробежал пёс. Отношение этих величин, равное $7/5$, даёт ответ на второй вопрос задачи.

Способ 2. Пусть расстояние от места расположения сосисок до точки старта кота равно x, а до будки пса равно y (в чём измеряются длина неважно, пусть в метрах). Обозначим скорость бега пса (в метрах за минуту, например) через a, тогда скорость бега кота будет $2a$ м/мин. Ещё введём скорости поедания сосисок (в кг/мин). Пусть эти скорости для кота и пса будут равны b и $2b$ соответственно. Теперь условия задачи легко выражаются уравнениями, а именно: время потраченное каждым из животных на бег и обед — это $\frac{x}{2a} + \frac{1/2}{b}$ для кота и $\frac{y}{a} + \frac{1/2}{2b}$ для пса, откуда $\frac{x}{2a} + \frac{1}{2b} = \frac{y}{a} + \frac{1}{4b}$. Условие, что кот мог бы за одно и то же время съесть все сосиски или добежать от места старта до будки пса, выражается равенством $\frac{x+y}{2a} = \frac{1}{b}$. Подставляя $\frac{1}{b}$ в первое уравнение, получаем $\frac{x}{2a} + \frac{x+y}{8a} = \frac{y}{a}$. Теперь, после очевидных преобразований получим $x = 1,4y$.

Примечание: Пункт а) можно решить и так: пусть сосиски положили на равном расстоянии от животных. Тогда после расчётов получим, что кот съел больше половины сосисок. Значит, сосиски положили ближе к псу.

Ответ: а) сосиски положили ближе к псу; б) путь кота в $1,4$ раза больше пути пса.

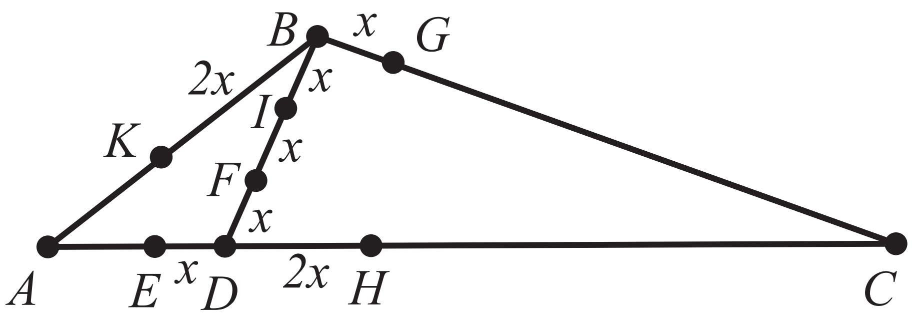
<u>*Рекомендации по проверке:*</u>

есть в работе	баллы
Верный и полностью обоснованный ответ на оба пункта	7 баллов
При верном ходе решения имеются арифметические ошибки, возможно, приведшие к неверному ответу	6 баллов
Верно составлено, но не решено уравнение (система уравнений) полностью описывающая условие задачи	4 балла
Верный и обоснованный ответ в пункте а) при отсутствии других продвижений в решении	2 балла
Верный ответ в пункте б) без обоснования	1 балл
Верный ответ в пункте а) без обоснования	0 баллов

9.4. *На основании AC треугольника ABC взята точка D. Докажите, что окружности, вписанные в треугольники ABD и CBD, точками касания не могут делить отрезок BD на 3 равные части.*

Решение: Предположим противное. Пусть такое возможно, и одна окружность касается отрезков AB AD и BD в точках K, E и F соответственно, а вторая окружность — отрезков CB CD и BD в точках G, H и I соответственно. Без ограничения общности, будем считать, что точка I лежит между точками B и F (см. рисунок). Пусть $BI = IF = FD = x$. Тогда по свойству касательных, проведённых к окружности из одной точки, получаем $BG = BI = x$, $BF = BK = 2x$, $ID = DH = 2x$ и $DF = DE = x$. Отсюда $BK = DH$ и $DE = BG$. Кроме того, $AK = AE$ и $CH = CG$. Но тогда

$$AB + BC = AK + KB + BG + GC = AE + DH + ED + CH = AC.$$



К решению задачи 9.4

Противоречие с неравенством треугольника.

Примечание: На самом деле, верен даже более общий факт: невозможен случай $BI = FD$ (при этом неважно, равны отрезки IF и BI или нет). Доказательство почти не меняется.

Ответ: это невозможно.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный и полностью обоснованный ответ	7 баллов
Имеется попытка использовать свойство отрезков касательных	3 балла
Рассмотрены частные случаи (в любом количестве)	1 балл
Верный ответ без обоснования или неверный ответ	0 баллов

9.5. *На полке стоит* 12 *книг. Сколькими способами можно выбрать* 5 *из них, если нельзя выбирать стоящие рядом книги? Ответ обоснуйте.*

Решение: Поставим справа на полку ещё одну, тринадцатую книгу. Склеим мысленно каждую выбранную книгу с соседней книгой справа. Это возможно, так как мы не выбираем 13-ю книгу и не выбираем рядом стоящие. Получиться 5 склеенных двухтомников и ещё 3 книги отдельно. Значит, способов столько же, сколько способов разместить в ряд 5 двухтомников (считая их одинаковыми) и 3 однотомника (тоже одинаковых). Это число равно числу сочетаний из 8 по 3, то есть равно $\dfrac{8!}{3!(8-3)!} = 56$.

Примечание: Возможны и другие способы решения (индукция по числу книг, прямой пересчёт и т. д.).

Ответ: 56-ю способами.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный и полностью обоснованный ответ	7 баллов
При верном ходе решения получен неверный ответ из-за арифметических ошибок	6 баллов
Верная идея «склеить» книгу с соседней справа не привела к верному ответу, так как неверно учтена крайняя справа книга	4 балла
При решении методом полного перебора учтены не все случаи	2 балла
Верный ответ без обоснования	1 балл

9.6. *Пусть a и b — положительные числа. Найдите наименьшее значение дроби $\dfrac{(a+b)(a+2)(b+2)}{16ab}$. Ответ обоснуйте.*

Решение: В силу неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим двух чисел выполняются три неравенства:

$$a+b \geqslant 2\sqrt{ab}, \quad a+2 \geqslant 2\sqrt{2a}, \quad b+2 \geqslant 2\sqrt{b}.$$

Перемножим левые и правые части этих трёх неравенств; получим

$$(a+b)(a+2)(b+2) \geqslant 8\sqrt{ab \cdot 2a \cdot 2b},$$

что равносильно неравенству $\dfrac{(a+b)(a+2)(b+2)}{16ab} \geqslant 1$. Значение 1 достигается на наборе $a=b=2$.

Примечание: Дробь, приведённая в условии задачи — это частный случай дроби $\dfrac{(a+b)(a+c)(b+c)}{8abc}$. Её минимум (при положительных переменных) также равен 1 и достигается при $a=b=c$. Доказательство этого факта не отличается от приведённого в решении.

Ответ: 1.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный и полностью обоснованный ответ	7 баллов
Уравнение $\frac{(a+b)(a+2)(b+2)}{16ab} = t$ (или равносильное ему) исследуется как квадратное (относительно одной из переменных) с параметрами, но исследование не завершено или неверно	4 балла
Верно исследован случай $a = b$ и не обосновано, что именно в этом предположении достигается минимум дроби	3 балла
Указан набор, на котором достигается наименьшее значение дроби ($a = b = 2$), но не доказана его оптимальность	1 балл
Верный ответ без обоснования и/или любые выкладки, из которых не видно хода решения	0 баллов