Решения задач муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников по математике 2017 год

9 класс

> ***Задача 1***. *При каких p один из корней уравнения $x^2 + px + 18 = 0$ вдвое больше другого?*

Ответ. 9 или –9.

Решение. Пусть корни уравнения есть a и $2a$. По теореме Виета $a + 2a = -p$, $a\cdot 2a = 18$. Значит, $a = \pm 3$, $p = -3a$.

Критерии. За потерю второго решения – вычитаются 2 балла. За ответ без обоснования – 0 баллов. Допускается решение без использования теоремы Виета. В случае полного обоснования – оценка 7 баллов.

> *2. Известно, что число $a = \frac{x}{x^2-x+1}$ рационально. Доказать, что число $b = \frac{x^2}{x^4-x^2+1}$ также рационально.*

Решение. При $x = 0$ число $b = 0$ – рационально. Если $x \neq 0$, то и $a \neq 0$, $b \neq 0$. Тогда можно записать $\frac{1}{a} = x - 1 + \frac{1}{x}$, $\frac{1}{b} = x^2 - 1 + \frac{1}{x^2}$. Значит, $x + \frac{1}{x} = \frac{1}{a} + 1$. Возведем это равенство в квадрат, получим $x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{2}{a} + 1$, откуда $\frac{1}{b} = \frac{1}{a^2} + \frac{2}{a} - 2$, то есть $b = \frac{a^2}{1+2a-2a^2}$. В силу рациональности a эта дробь также рациональна. Осталось только проверить, что b всегда существует. Знаменатель мог бы обратиться в ноль при $a = \frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$, что невозможно в силу рациональности a.

Критерии. Если не исследован случай $x = 0$, снимается 1 балл. Если не проверено, что b существует – снимается 3 балла. В случае полного обоснования – оценка 7 баллов.

> *3. Натуральное число n таково, что числа $2n + 1$ и $3n + 1$ являются квадратами. Может ли при этом число n быть простым?*

Ответ. Нет, не может.

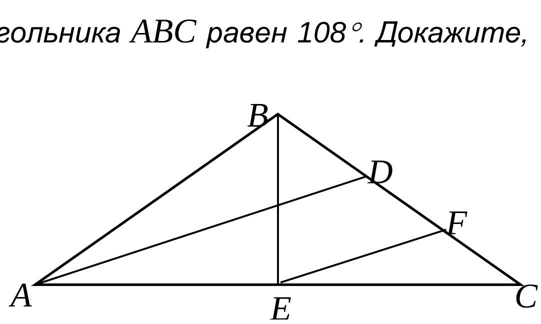
Решение. Пусть $2n + 1 = a^2$ и $3n + 1 = b^2$, тогда

$$n = (3n + 1) - (2n + 1) = b^2 - a^2 = (b - a)(b + a).$$

Если число n — простое, то $b - a = 1$ и $b + a = n$. Из этих равенств легко выразить числа a и b через n: $a = \frac{n-1}{2}$ и $b = \frac{n+1}{2}$. Подставив выражение для a в исходное равенство $2n + 1 = a^2$, получим квадратное уравнение $n^2 - 10n - 3 = 0$, которое не имеет целых корней. Значит, такого простого числа n нет.

Критерии. Доказано только равенство $n = (b - a)(b + a)$ — 2 балла.

> *4. Угол при вершине B равнобедренного треугольника ABC равен 108°. Докажите, что биссектриса угла A вдвое больше биссектрисы угла B.*



Решение. Пусть AD и BE — биссектрисы равнобедренного треугольника ABC. Через точку E проведём отрезок EF параллельно AD, тогда EF – средняя линия треугольника ACD, и $EF = \frac{1}{2}AD$. Несложным подсчётом углов получаем $\angle FBE = \angle BFE = 54^\circ$, и значит, треугольник BEF — равнобедренный. Отсюда $BE = EF = \frac{1}{2}AD$, и поэтому $AD = 2 \cdot BE$.

Критерии. В случае полного обоснования – оценка 7 баллов.

> *5. а) Какое наибольшее количество неперекрывающихся полосок 1 × 3 можно уместить на салфетке, изображенной на рисунке? б) Какое наименьшее количество полосок 1 × 3 потребуется, чтобы покрыть салфетку целиком, если полоски могут перекрываться?*

Ответ.

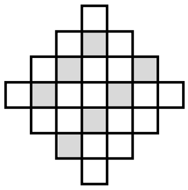


Рис. 1, а

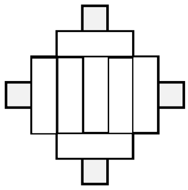


Рис. 1, б

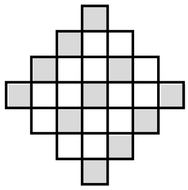


Рис. 2, а

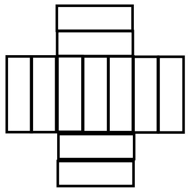


Рис. 2, б

Решение. а) Раскрасим клетки на салфетке, как показано на рисунке 1,а («диагональная» рас-краска). Каждая полоска 1×3 не может содержать более одной чёрной клетки. Поскольку чёрных кле-ток всего 7, мы не можем уместить на салфетке более 7 полосок (оценка). На рисунке 1,б приведён пример 7 полосок, которые можно разместить на салфетке.

б) Раскрасим клетки на салфетке, как показано на рисунке 2,а. Каждая полоска 1×3 не может со-держать более одной чёрной клетки. Поскольку чёрных клеток всего 11, для покрытия салфетки по-надобится не менее 11 полосок (оценка). На рисун-ке 2,б приведен пример 11 полосок, которые целиком покрывают салфетку.

Критерии. Ответ без обоснования – по 1 баллу за каждый пункт. Доказано, что число наибольшее или наименьшее – по 3 балла за каждый пункт. Полное решение – 7 баллов.